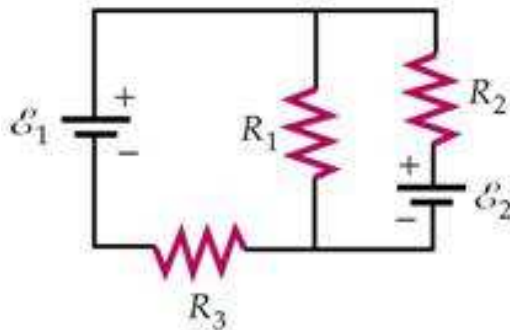


Capítulo 1

Introducción al análisis básico de circuitos eléctricos: Conceptos

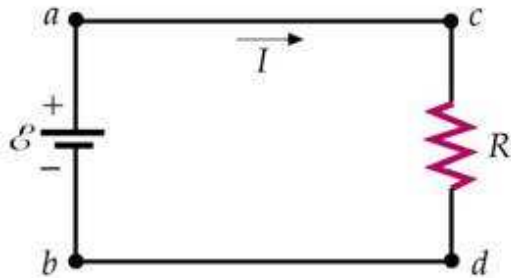
1.1. Introducción

Un circuito eléctrico o red eléctrica es una colección de elementos eléctricos¹ interconectados en alguna forma específica.



Generalmente, un circuito eléctrico básico estará sujeto a una entrada o excitación y se producirá una respuesta o salida a dicha entrada.

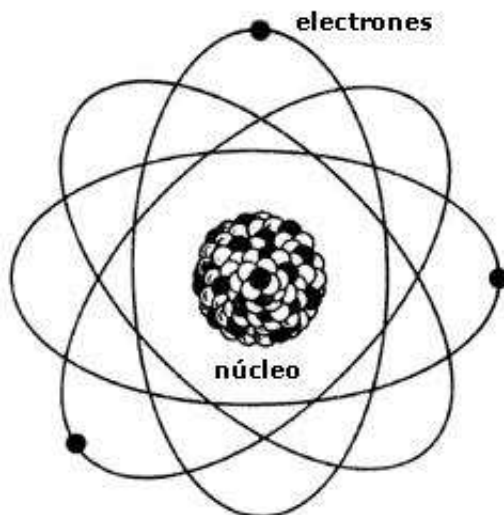
¹istema formado por un elemento general (resistencia, capacitor, inductor, fuentes de energía) con dos terminales.



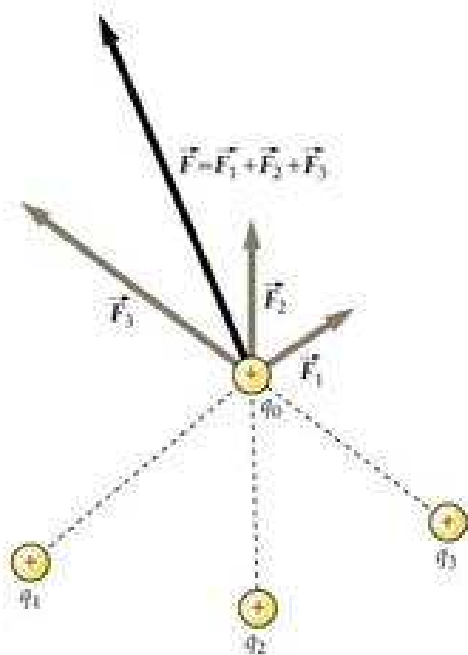
El análisis de circuitos es el proceso de determinación de la salida de un circuito conocida la entrada y el circuito en sí. En cambio, el diseño de circuitos, es obtener un circuito conocida la entrada y la respuesta que debe tener el circuito.

1.2. Carga eléctrica

La materia está formada por átomos. Éstos a su vez, están formados por partículas elementales: neutrones y protones (en el núcleo) y electrones que se mueven en órbitas alrededor del núcleo. Normalmente, el átomo es eléctricamente neutro y sólo la presencia mayoritaria de protones (partícula cargada positivamente) o electrones (partícula cargada negativamente) da un carácter eléctrico al mismo.



La interacción entre átomos no neutros se manifiesta como una fuerza denominada fuerza eléctrica, con una característica de atracción o repulsión dependiendo del carácter eléctrico entre cargas: cargas de igual signo se repelen y de signo contrario se atraen.

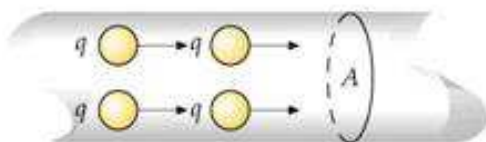


Un electrón tiene una carga negativa de $1,6021 \times 10^{-9}C$. Es decir, un culombio (C) es el conjunto de cargas de aproximadamente $6,24 \times 10^{18}$ electrones. El protón tiene el mismo valor de carga que el electrón pero su signo es positivo.

El símbolo de la carga será tomado como Q o q , la letra mayúscula denotará cargas constantes tales como $Q = 4C$, y la letra minúscula indicará cargas variables en el tiempo. En este caso, podemos enfatizar la dependencia temporal escribiendo $q(t)$. De forma general, este criterio de mayúsculas y minúsculas se extenderá al resto de variables empleadas.

1.3. Corriente eléctrica

El propósito primario de un circuito eléctrico consiste en mover o transferir cargas a lo largo de determinadas trayectorias.



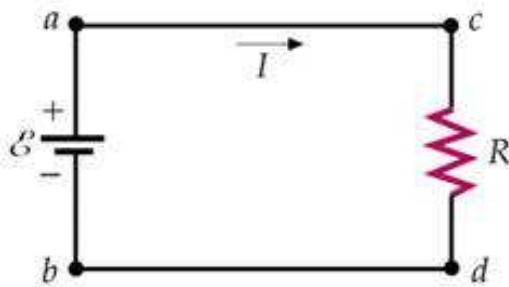
Este movimiento de cargas constituye una corriente eléctrica. Formalmente la corriente viene dada por:

$$i = \frac{dq}{dt}$$

La unidad básica de la corriente es el amperio (A). Un amperio es la corriente que fluye cuando $1C$ de carga pasa por un segundo en una sección dada ($1A = 1C/s$).

En teoría de circuitos, la corriente es generalmente especificada por el movimiento de cargas positivas². Hoy en día se sabe que en el caso de conductores metálicos, esto no es cierto, son los electrones los portadores de carga que se mueven. No obstante, tomaremos la convención tradicional del movimiento de cargas positivas para definir la corriente convencional sin tener en cuenta la identidad verdadera de los portadores de la carga.

El flujo de corriente a lo largo de un cable o a través de un elemento será especificado por dos indicadores: una flecha, que establece la dirección de referencia de la corriente y un valor (variable o fijo), que cuantifica el flujo de corriente en la dirección especificada.



Podemos determinar la carga total que entra al elemento entre el tiempo t_0 y t mediante la expresión:

$$q_r = q(t) - q(t_0) = \int_{\tau=0}^{\tau=t} i \, d\tau$$

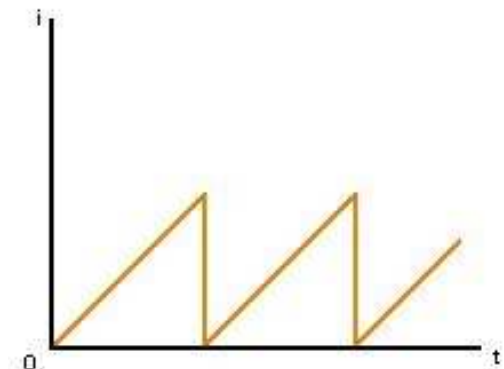
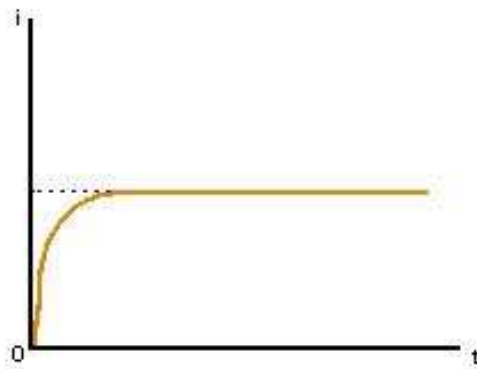
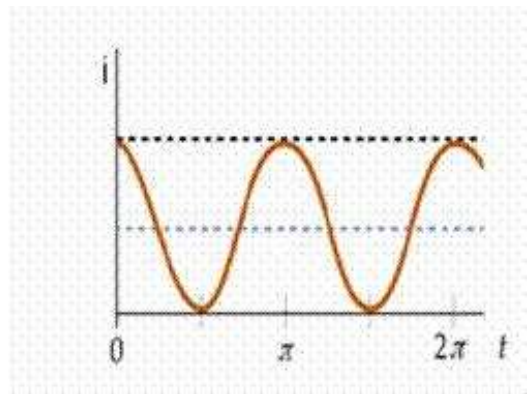
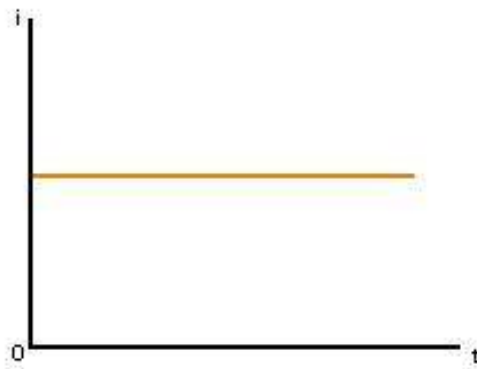
Estamos considerando que los elementos de la red son eléctricamente neutros, es decir, no puede acumularse carga en el elemento. Una carga que entra debe corresponder a otra carga igual que sale (en magnitud y en signo). Ya veremos que esta propiedad es una consecuencia de la ley de corriente de Kirchhoff.

Existen diferentes tipos de corriente:

1. corriente continua o directa (DC) usada principalmente en circuitos electrónicos.

²Convención propuesta por Franklin, B. quien supuso que la electricidad viajaba de lo positivo a lo negativo

2. corriente alterna (AC) usada como corriente doméstica es de tipo sinusoidal.
3. corriente exponencial aparece en fenómenos transitorios por ejemplo en el uso de un interruptor.
4. corriente en dientes de sierra útiles en aparatos de rayos catódicos para visualizar formas de onda eléctricas.

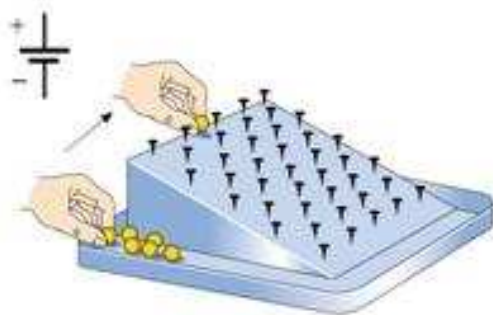


1.4. Fuerza electromotriz

Las cargas de un conductor metálico, electrones libres, pueden moverse de manera aleatoria. Sin embargo, si queremos un movimiento ordenado de las cargas, debemos aplicar una fuerza externa de manera que se ejercerá un trabajo sobre las cargas. A esta fuerza se le denomina fuerza electromotriz (ξ).

1.5. Voltaje

El voltaje es el trabajo realizado para mover una carga unitaria ($1C$) a través del elemento de una terminal a la otra. Este voltaje estará designado por dos indicadores: un signo $+$ o $-$, en el que se establece la dirección de referencia del voltaje y un valor (fijo o variable) el cual va a cuantificar el voltaje que pasa por un elemento en la dirección de referencia especificada.



(b)

La unidad fundamental del potencial eléctrico es el voltio (V). Si una carga de $1C$ pudiera ser movida entre dos puntos en el espacio con el gasto de $1J$ de trabajo, entonces la diferencia de potencial entre esos dos puntos sería de $1V$.

A menudo usaremos una notación de doble índice donde v_{ab} denota el potencial del punto a con respecto al punto b .

1.6. Energía

Al transferir carga a través de un elemento, se efectúa trabajo, o dicho de otra manera, estamos suministrando energía. Si deseamos saber si esta energía está siendo suministrada al elemento o por el elemento al resto del circuito, debemos conocer no sólo la polaridad del voltaje a través del elemento, sino también la dirección de la corriente eléctrica a través del elemento.

Si una corriente positiva entra por la terminal positiva, entonces una fuerza externa está impulsando la corriente, y por tanto, está suministrando o entregando energía al elemento. El elemento está absorbiendo energía.

En cambio, si la corriente positiva sale por la terminal positiva (entra por la terminal negativa), entonces el elemento está entregando energía al circuito externo.

1.7. Potencia

Consideremos ahora la razón en la cual la energía está siendo entregada por un elemento de un circuito.

El voltaje a través de un elemento es v y se mueve una pequeña carga Δq a través del elemento de la terminal positiva a la negativa, entonces la energía absorbida por el elemento, Δw , está dada por

$$\frac{\Delta w}{\Delta t} = v \frac{\Delta q}{\Delta t}$$

cuando $\Delta t \rightarrow 0$, tenemos

$$p = \frac{dw}{dt} = vi$$

La unidad fundamental de la potencia es el vatio (W) y se define como la energía consumida o trabajo producido por unidad de tiempo ($1W = 1J/s$).

En general, tanto el voltaje como la intensidad son funciones del tiempo, por tanto, la potencia será una cantidad variable en el tiempo. La expresión anterior se le denomina potencia instantánea porque expresa la potencia en el instante en que se miden v e i .

Cuando $p = vi > 0$ significa que el elemento está absorbiendo potencia (la flecha que indica la dirección de referencia de la corriente está en el lado positivo de la dirección de referencia del voltaje). Si $p = vi < 0$, significa que el elemento está entregando potencia.

La energía w entregada a un elemento entre el tiempo t_0 y t se calcula mediante la expresión:

$$w(t) - w(t_0) = \int_{t_0}^t vi dt$$

1.8. Elementos eléctricos activos y pasivos

Podemos clasificar los elementos de un circuito en dos categorías: elementos pasivos y elementos activos, teniendo en cuenta la energía entregada a los elementos o por los elementos.

Un elemento eléctrico es pasivo en un circuito si éste no puede suministrar más energía que la que tenía previamente, siendo suministrada a éste por el resto del circuito. Esto es, la energía neta absorbida por un elemento pasivo hasta t debe ser no negativa ($w(t) \geq 0$).

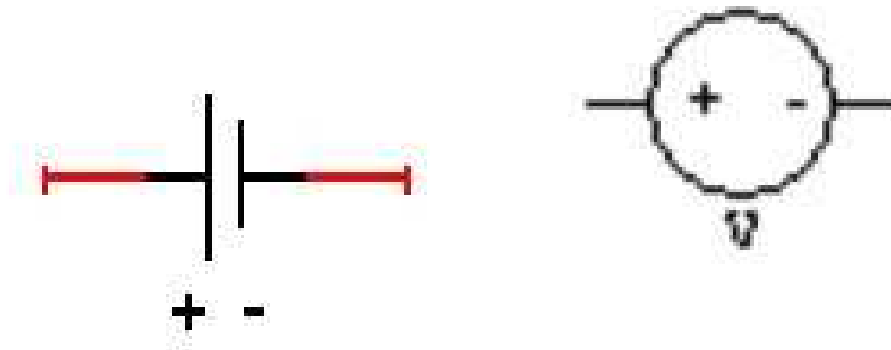
$$w(t) = \int_{-\infty}^t p(\tau) d\tau = \int_{-\infty}^t v(\tau)i(\tau) d\tau$$

Son elementos pasivos los resistores (R), capacitores (C) e inductores (L).

Un elemento es activo cuando no es pasivo. Los elementos activos son generadores, baterías y dispositivos electrónicos que requieren fuentes de alimentación.

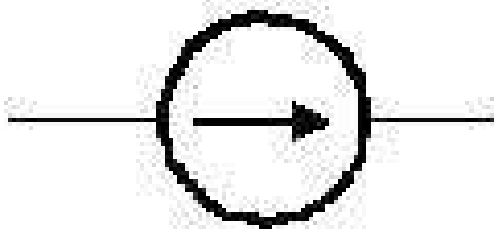
1.9. Fuente de voltaje independiente

Es un elemento de dos terminales, como una batería o un generador, que mantienen un voltaje específico entre sus terminales a pesar del resto del circuito que está conectado a él. El voltaje es por completo independiente de la corriente a través del circuito. Se conoce también como fuente de voltaje ideal.



1.10. Fuente de corriente independiente

Es un elemento de dos terminales a través de la cual fluye una corriente especificada. El valor de esta corriente está dado por la función fuente y la dirección de referencia de la función fuente por la flecha dentro de la fuente. Se conoce también como fuente de corriente ideal.



1.11. Elementos básicos en circuitos

	Resistencia	Bobina	Condensador
Símbolo de circuito:	$i(t)$ $v(t)$	$i(t)$ $v(t)$	$i(t)$ $v(t)$
Voltaje:	$v(t) = R \cdot i(t)$	$v(t) = L \frac{di(t)}{dt}$	$v(t) = \frac{1}{C} \int_{t_0}^t i(\tau) d\tau + v(t_0)$
Impedancia (Z)	R	$j\omega L$	$j \frac{1}{\omega C}$

Capítulo 2

Circuitos resistivos

2.1. Introducción

Consideraremos que una resistencia es cualquier dispositivo que posee una resistencia eléctrica, es decir, impide o dificulta en mayor o menor medida el movimiento de electrones a través del material. La unidad básica de la resistencia es el ohmio (Ω).

Para propósitos del análisis de circuitos, un circuito eléctrico se describe con base en dos características específicas: los elementos que contiene y como se interconectan. Para determinar el voltaje y la corriente resultantes no se requiere nada más.

Un circuito consiste en dos o más elementos que se conectan mediante conductores perfectos. Los conductores perfectos son cables o alambres que permiten el flujo de corriente con resistencia cero. En cuanto a la energía, sólo puede considerarse como acumulada o concentrada en cada elemento del circuito.

2.2. Ley de Ohm

La ley de Ohm postula que el voltaje a través de una resistencia es directamente proporcional a la corriente que pasa por la resistencia. La constante de proporcionalidad es el valor de la resistencia en ohmios ($1\Omega = 1V / A$).

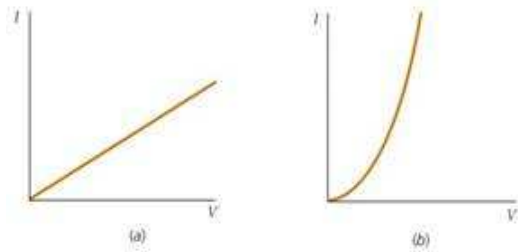
$$v = Ri$$

donde $R \geq 0$.

Puesto que R es una constante, al representar gráficamente voltaje frente a corriente, obtendremos una curva lineal y diremos que la resistencia es lineal. Existen otros tipos de resistencias cuya representación voltaje-intensidad

no es lineal y por tanto la resistencia obtenida no es lineal y dificulta en gran medida el análisis del circuito¹.

Aunque en realidad, todas las resistencias prácticas son no lineales debido a diversos factores como temperatura, intensidad. Muchos materiales se aproximan a resistencias lineales en un rango limitado de corrientes y condiciones ambientales y por tanto nos centraremos exclusivamente en este tipo de materiales.



La resistencia de un alambre conductor es proporcional a su longitud e inversamente proporcional al área transversal.

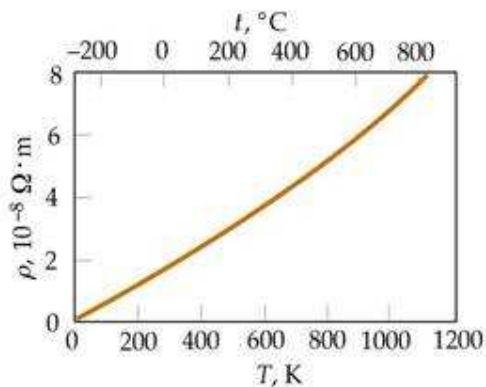
$$R = \rho \frac{L}{A}$$

siendo ρ una constante de proporcionalidad llamada resistividad del material conductor. La unidad de resistividad es el $\Omega \cdot m$.

A su vez, la resistividad (y por tanto la conductividad) de cualquier metal depende de la temperatura. Suele darse la resistividad en tablas en función de su valor ρ_{20} a 20°C y a su vez el coeficiente de temperatura de la resistividad α que es la pendiente de la curva ρ en función de T. Una expresión de la resistividad a otra temperatura Celsius t_C viene dada por

$$\rho = \rho_{20} [1 + \alpha(t_C - 20^\circ\text{C})]$$

¹También se les conoce por materiales óhmicos si verifican la ley de Ohm o bien materiales no-óhmicos para aquellos que no la verifican.



2.3. Tipos de resistencias

Existen diversos tipos de resistencia, según cómo estén fabricadas, su potencia, precisión, etc.

Bobinadas Son aquellas en las que su valor resistivo se obtiene basándose en una cierta longitud y sección de hilo de determinado material. Para que sus dimensiones sean mínimas, dicho hilo se monta en forma arrollada, de ahí el término de resistencias bobinadas.

Carbón Son aquellas que normalmente se usan en electrónica. Su valor resistivo se obtiene por medio de polvo de carbón mezclado con aglomerante. Son resistencias de pequeñas dimensiones y de baja potencia (bajo precio también). Su precisión no es muy alta, generalmente tienen una tolerancia² del 5 % ó del 10 %.

Película Son resistencias de mayor precisión y se suelen utilizar en circuitos electrónicos del alta precisión. Su valor óhmico se obtiene actuando sobre las dimensiones y tipo de materia de una película de material resistivo aplicada sobre la superficie de una varilla cilíndrica. Las tolerancias típicas son del orden de 1 %. Los materiales usados más comunes son las de película de carbón, película de óxidos metálicos y las de película metálica.

2.4. Codificación del valor. Código de colores

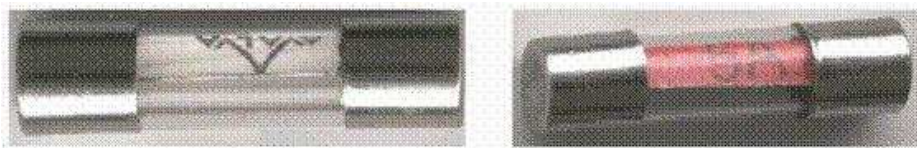
El valor óhmico de las resistencias normalmente utilizadas en electrónica se presenta por medio de un código de colores. Excepto las resistencias de

²Tolerancia es el margen de variación de su valor nominal

potencia, que son las bobinadas. Consiste en pintar unas bandas de colores alrededor del cuerpo de la resistencia. Cada color representa un número; de esta manera se representa el valor nominal de la resistencia y su tolerancia (margen de variación).

2.5. Otros dispositivos de interés

2.5.1. Fusibles



Son elementos conductores que constituyen la parte más débil del circuito con el fin de que si se produce algún tipo de sobrecarga (exceso de corriente), se destruya el fusible y de esta manera se interrumpa el paso de corriente a través del circuito. Los fusibles son pues, dispositivos de protección frente a sobrecargas (o cortocircuitos).

La destrucción del fusible se produce por fusión del material debido a la elevada temperatura que adquiere al circular la elevada intensidad de corriente provocada por la sobrecarga.

2.5.2. Potenciómetros



Los potenciómetros son resistencias cuyo valor se pueden variar por medio de un eje. Son los elementos utilizados para el ajuste de volumen en aparatos de sonido, el brillo del televisor, etc. En general, son utilizados cuando interesa poder hacer la graduación de ciertas magnitudes en los aparatos electrónicos.

Se trata de una resistencia de tres terminales; dos de ellos corresponden a los terminales de la resistencia, y el otro es móvil. El terminal móvil, cuando es actuado, puede hacer contacto con cualquier punto de la resistencia nominal.

Así, entre el terminal móvil y cualquiera de los otros dos terminales puede realizar el ajuste de un valor de resistencia entre 0Ω y el valor máximo.

Los potenciómetros pueden ser de variación lineal o logarítmica. En los de tipo lineal, la magnitud de variación de resistencia es proporcional a la variación de giro del cursor. En los de tipo logarítmico, la resistencia varía según una escala logarítmica en función de la posición del cursor.

2.6. Descripción de partes del circuito eléctrico

Nodo Un punto de conexión de dos o más elementos de circuito se denomina nodo junto con todo el cable o alambre de los elementos.

Rama Sección que une a un elemento a 2 nodos.

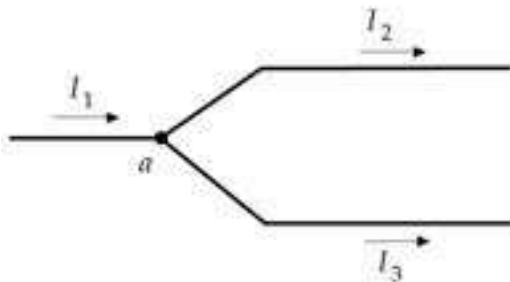
Malla Conjunto de ramas que describen una trayectoria cerrada.

2.7. Leyes de Kirchhoff

2.7.1. Ley de corriente de Kirchhoff (LCK)

La suma algebraica de las corrientes que entran por cualquier nodo son cero.

$$\sum_{n=1}^N i_n = 0$$

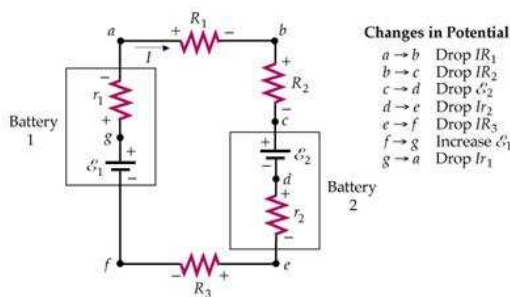


$$I_1 - I_2 - I_3 = 0$$

2.7.2. Ley de voltajes de Kirchhoff (LVK)

La suma algebraica de los voltajes a lo largo de cualquier trayectoria cerrada es cero.

$$\sum_{n=1}^N v_n = 0$$



2.8. Definiciones

Potencia instantánea $p = vi = Ri^2 = \frac{v^2}{R}$

Conductancia $G = \frac{1}{R}$ (Siemens o Ω^{-1})

Corto circuito Es una resistencia de cero ohmios, en otras palabras, es un conductor perfecto capaz de llevar cualquier cantidad de corriente sin sufrir una caída de voltaje por donde pasa. Dos puntos pueden ser cortocircuitados juntándolos con un cable.

Circuito abierto Es una resistencia de conductancia cero siemens, en otras palabras es un perfecto aislante capaz de soportar cualquier voltaje sin permitir que fluya corriente a través de él. Es decir, una resistencia infinita o un cable roto.

2.9. Subcircuitos equivalentes

Una estrategia general que vamos a utilizar en el análisis de circuitos eléctricos es la simplificación siempre que sea posible.

Un subcircuito es una parte de un circuito. Un subcircuito contiene un número de elementos interconectados, pero sólo dos terminales accesibles, por lo que es llamado subcircuito de dos terminales. El voltaje que pasa a través

y la corriente que entra en esas terminales son llamados voltaje terminal y corriente terminal del subcircuito.

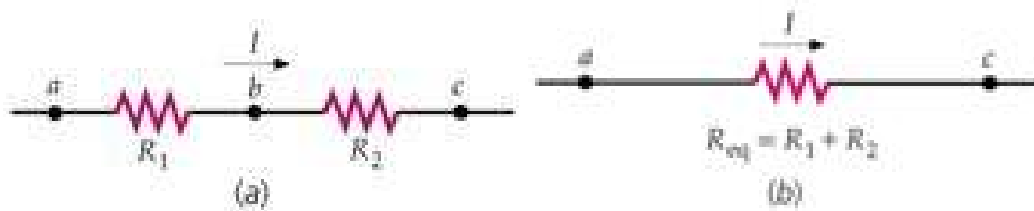
2.10. Series equivalentes

Dos elementos contiguos se dicen que están conectados en serie si en su parte de nodo común no tiene otras corrientes que entren en él.

2.10.1. Resistencias

De forma generalizada, si tenemos N resistencias conectadas en serie tenemos

$$R_{eq} = \sum_{i=1}^N R_i$$



2.10.2. Fuentes de voltaje

Una cadena de fuentes de voltaje son equivalentes a una simple fuente de voltaje donde la función fuente es la suma algebraica de las funciones fuentes en serie.

$$\xi_{eq} = \sum_{i=1}^N \xi_i$$

2.10.3. Fuentes de intensidad

En este caso todas las fuentes de corriente deben ser de igual corriente de modo que

$$i_s = i_1 = i_2 = \dots = i_N$$

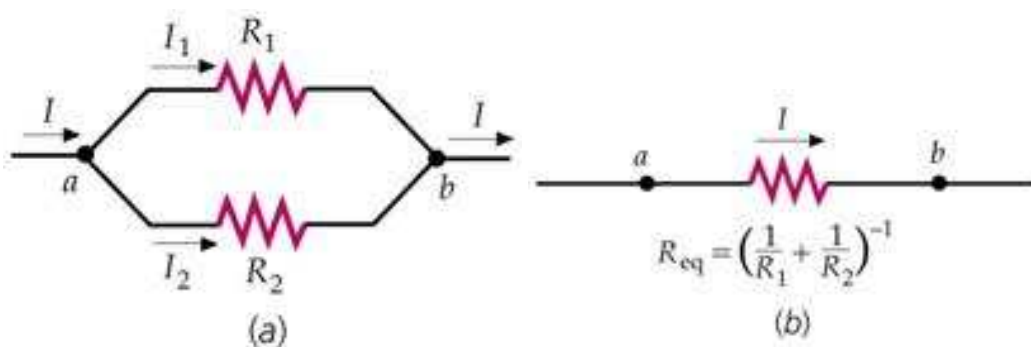
2.11. Equivalentes en paralelo

Dos elementos están conectados en paralelo si forman una malla sin contener otros elementos. Es decir, elementos en paralelo tienen el mismo voltaje que pasa por ellos.

2.11.1. Resistencias

Para un conjunto de N resistencias conectadas en paralelo, es equivalente a una resistencia simple en donde su conductancia es la suma de las conductancias paralelas.

$$G_{eq} = \sum_{i=1}^N G_i \quad R_{eq}^{-1} = \sum_{i=1}^N \frac{1}{R_i}$$



2.11.2. Fuentes de voltaje

En este caso todas las fuentes de voltaje en paralelo deben ser todas ellas iguales y además deben conectarse con igual polaridad: todos los terminales positivos y todos los terminales negativos.

$$\xi_s = \xi_1 = \xi_2 = \dots = \xi_N$$

2.11.3. Fuentes de intensidad

Una serie de fuentes de corriente en paralelo son equivalentes a una fuente de corriente simple donde su función fuente es la suma de las funciones en paralelo.

$$i_{eq} = \sum_{i=1}^N i_i$$

2.12. Equivalentes de Thevenin y Norton

Los equivalentes serie y paralelos descritos hasta el momento son limitaciones de elementos del mismo tipo. En esta sección vamos a desarrollar un par de equivalentes denominados de Thevenin y Norton de gran utilidad en la simplificación de cualquier análisis de problemas de circuitos.

2.12.1. Teorema de Thevenin

Una red lineal activa con resistencias que contenga una o más fuentes de voltaje o corriente puede reemplazarse por una única fuente de voltaje y una resistencia en serie.

2.12.2. Teorema Norton

Una red lineal activa con resistencias que contenga una o más fuentes de voltaje o corriente puede reemplazarse por una única fuente de corriente con una resistencia en paralelo.

La forma de Thevenin con una fuente de voltaje v_T y una resistencia en serie R_T es equivalente a la forma de Norton con una fuente de corriente i_N y una resistencia en paralelo R_N , si

$$\text{a) } R_T = R_N$$

$$\text{b) } v_T = R_N i_N$$

Para encontrar la resistencia $R_T = R_N$ común de los sistemas Thevenin y Norton sólo basta “suprimir” las fuentes internas independientes (cortocircuitar las fuentes) y calcular la resistencia equivalente del sistema.

Para determinar el valor v_T sólo necesitamos determinar el voltaje existente entre los terminales del sistema en circuito abierto. Y para i_N podemos obtener su valor a partir del equivalente Thevenin.

2.13. Teorema de la máxima transferencia de potencia

En muchas ocasiones nos interesa saber cuáles son las mejores condiciones que deben reunir el dispositivo que suministra potencia y el que la recibe para que se transfiera la máxima potencia del generador al receptor.

Supongamos que tenemos un equivalente Thevenin representante de un circuito eléctrico (V_T, R_T) y unimos a los bordes de este dispositivo una resistencia de carga R a los terminales correspondientes. Tenemos que

$$P = V_{ab}I = I^2R = R \left(\frac{V_T}{R + R_T} \right)^2 = V_T^2 \frac{R}{(R + R_T)^2}$$

Para obtener la expresión para que se transfiera la máxima potencia debemos derivar la expresión anterior con respecto a R (nuestra variable) e igualar a cero.

$$\frac{dP}{dR} = V_T^2 \frac{R_T - R}{(R + R_T)^2} = 0 \Rightarrow R = R_T$$

Capítulo 3

Introducción

En este tema nos centraremos en el análisis de circuitos mediante métodos sistemáticos que nos permitan resolver completamente cualquier circuito lineal¹.

Consideraremos dos métodos generales; el primero se basa en la ley de voltajes de Kirchhoff (LVK) denominado resolución por mallas, y el segundo se basa en la ley de corriente de Kirchhoff (LCK) conocido por el nombre de resolución por nodos.

Pero primeramente veremos como pueden usarse los principios de proporcionalidad y superposición para dividir un problema de circuitos lineales que involucran varias fuentes, en problemas de componentes, donde cada uno involucra una sola variable, o una sola fuente.

Para una completa formación es necesario ejercitar con numerosos ejemplos los conocimientos expuestos en el presente capítulo.

3.1. Principio de Proporcionalidad

Cualquier circuito lineal verifica el principio de proporcionalidad. Esto es, si x e y son variables de circuito asociadas con un elemento de dos terminales, entonces diremos que el elemento es lineal si multiplicar x por una variable K es igual a la multiplicación de y por la misma constante K . Este principio sólo es aplicable en circuitos lineales.

¹Un circuito es lineal cuando sólo contiene elementos lineales y fuentes independientes.

3.2. Principio de Superposición

La respuesta general de un circuito lineal que contiene varias fuentes independientes es la suma de las respuestas a cada fuente individual, eliminando las otras fuentes. En general, este principio sólo es válido para circuitos lineales.

Las fuentes de corriente se eliminan o son fijadas en cero, es decir, se reemplazan por circuitos abiertos, mientras que las fuentes de voltaje se reemplazan por corto-circuitos.

3.3. Método de Mallas

El análisis de malla consiste en escribir las ecuaciones LVK alrededor de cada malla en el circuito, utilizando como incógnita las corrientes de malla. Las n ecuaciones simultáneas de un circuito con n mallas pueden ser escritas en forma de matriz. La ecuación de matriz resultante puede resolverse por varias técnicas. Una de ellas es el método de determinantes o regla de Cramer².

$$\begin{bmatrix} R_{11} & R_{12} & R_{13} & \cdots & R_{1N} \\ R_{21} & R_{22} & R_{23} & \cdots & R_{2N} \\ R_{31} & R_{32} & R_{33} & \cdots & R_{3N} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ R_{N1} & R_{N2} & R_{N3} & \cdots & R_{NN} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} I_1 \\ I_2 \\ I_3 \\ \vdots \\ I_N \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} V_1 \\ V_2 \\ V_3 \\ \vdots \\ V_N \end{bmatrix}$$

R_{ii} representa la suma de todas las resistencias a través de las cuales pasa la corriente I_i de malla, o dicho de otra manera, la suma de todas las resistencias que pertenecen a la malla i .

R_{ij} representa la suma de todas las resistencias a través de las cuales pasan las corrientes de malla I_i e I_j . El signo de R_{ij} es $+$ si las corrientes están en la misma dirección a través de cada resistencia, y el signo R_{ij} de $-$ es si están en direcciones opuestas. Debemos hacer hincapié en que la matriz de resistencias es simétrica, es decir $R_{ij} = R_{ji}$.

La matriz o vector de corriente no requiere explicación. Estas son las incógnitas en el método que se está describiendo.

La matriz o vector de voltajes tenemos que V_i es la suma algebraica de todas las fuentes que pertenecen a la malla i usando el criterio de la señal pasiva.

²Consultar bibliografía

3.3.1. Resolución del método de mallas con fuentes dependientes

- 1) Escribiremos las ecuaciones de análisis como si la fuente fuese independiente.
- 2) Luego sustituimos la variable de control por las variables deseadas del método de análisis (en este caso la corriente de malla)

3.3.2. Resolución del método de mallas con fuentes de corriente dependiente

La presencia de fuentes de corriente reduce el número de incógnitas en el análisis de malla a razón de una por fuente de corriente.

- 1) Se identifica las corrientes de mallas con aquellas de las funciones de corriente
- 2) Planteamos las ecuaciones LVK para coincidir con el número reducido de ecuaciones
- 3) El circuito resultante será eliminando las fuentes de corriente por circuitos abiertos

3.4. Método de Nodos

Es un método general de análisis de circuitos en donde los voltajes son las incógnitas que deben obtenerse. En general, una elección conveniente para el voltaje es el conjunto de voltajes de nodo. Puesto que un voltaje se define como el existente entre dos nodos, es conveniente seleccionar el nodo en la red que sea nodo de referencia, y luego asociar un voltaje a cada uno de los demás nodos.

Comúnmente se elige como nodo de referencia al nodo al que se conecta la mayor cantidad de ramas.

Las ecuaciones del análisis nodal se obtienen aplicando LCK en los nodos salvo el de referencia. De forma matricial podemos plantear el sistema de ecuaciones de la siguiente manera:

$$\begin{bmatrix} G_{11} & G_{12} & G_{13} & \cdots & G_{1N} \\ G_{21} & G_{22} & G_{23} & \cdots & G_{2N} \\ G_{31} & G_{32} & G_{33} & \cdots & G_{3N} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ G_{NN} & G_{N2} & G_{N3} & \cdots & G_{NN} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} V_1 \\ V_2 \\ V_3 \\ \vdots \\ V_N \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \chi_1 \\ \chi_2 \\ \chi_3 \\ \vdots \\ \chi_N \end{bmatrix}$$

G_{ii} contiene la recíproca de todas las resistencias conectadas al nodo i .

G_{ij} representa la recíproca (o inversa) de todas las resistencias de las ramas que unen al nodo i y al nodo j .

La matriz o vector de voltajes de nodo no requiere explicación. Estas son las incógnitas en el método que se está describiendo.

Los elementos χ_i del vector de la derecha representan las corrientes de impulsión. Es decir, χ_i será la suma algebraica de las corrientes impulsoras que estén relacionadas con el nodo i .

Las corrientes impulsoras son aquellas ramas que presenten fuentes de intensidad o bien ramas con fuentes de voltaje y resistencia asociada a dicha rama ($I_i = V_i/R_i$) de forma que tomaremos valor positivo si la corriente llega al nodo correspondiente y daremos un valor negativo en caso contrario.

Capítulo 4

Circuitos eléctricos de corriente alterna

4.1. Introducción

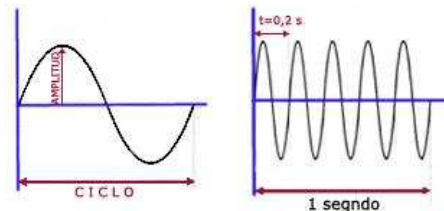
Llamamos corriente alterna a aquella corriente cuya intensidad es una función sinusoidal del tiempo, es decir, una corriente que periódicamente cambia de dirección y sentido; por tanto, no es posible asociar una dirección fija a la corriente en los circuitos de corriente alterna. La energía eléctrica que se obtiene de la red es alterna y de forma sinusoidal. Es el tipo de energía que proporcionan las máquinas generadoras de las centrales eléctricas.

La razón fundamental de que en la red se suministre corriente alterna en vez de continua se basa en que ésta puede transformarse fácilmente (mediante transformadores) y reduce los costes de transporte y permite disponer fácilmente de diferentes valores de tensión según las aplicaciones. Puede transportarse a largas distancias a tensiones elevadas y corrientes bajas para reducir las pérdidas de energía en forma de calor por efecto Joule.

En este capítulo repasaremos todas las herramientas necesarias para el análisis de circuito en corriente alterna en su estado estable, pues es una extensión natural de los métodos vistos en capítulos anteriores, bastará sustituir la resistencia por su equivalente en el caso de corriente alterna: la impedancia.

Pero previamente introduciremos algunos conceptos necesarios que, a modo de recordatorio, serán necesarios para un correcto entendimiento del tema.

4.2. Características básicas de las ondas sinusoidales



Ciclo Recorrido completo que hace la onda y que se repite periódicamente. Un ciclo se compone de dos semiciclos.

Amplitud Valor máximo que alcanza la onda, en el semiciclo positivo.

Periodo Tiempo necesario en generarse un ciclo completo. Su unidad es el segundo.

Frecuencia Número de ciclos que se efectúan en un segundo. Su unidad es el *Hz*. Frecuencia y Periodo están relacionados por la siguiente expresión

$$f = \frac{1}{T}$$

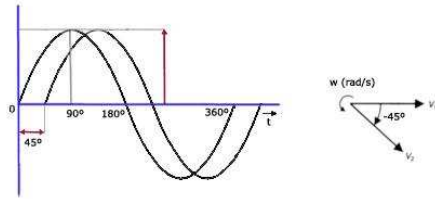
Velocidad angular Ángulo recorrido por unidad de tiempo (debido al movimiento giratorio del generador). Su unidad es el rd/seg.

$$w = 2\pi f = \frac{2\pi}{T}$$

Desfase de onda Las ondas, además de diferir entre sí en frecuencia y amplitud, también pueden hacerlo en lo que se denomina relación de fase. Dos ondas de igual frecuencia se dicen que están en fase si sus valores instantáneos varían a la vez, o sea, de forma sincronizada.

Cuando existe un desplazamiento de tiempo entre la variación de dos ondas de igual frecuencia, se dice que están desfasadas.

El desfase entre dos ondas de igual frecuencia es la diferencia de tiempo que hay entre dos puntos tomados de referencia, que pueden ser el inicio de ciclo de una de ellas con respecto a la otra.

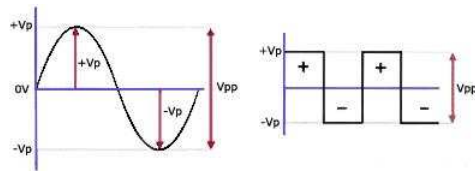


Ya en el caso que nos ocupa, la corriente alterna, pasemos a definir algunos términos de uso habitual.

Tensión instantánea El voltaje puede ser expresado como $v = V \sin(\omega t + \phi)$ o bien $v = V \cos(\omega t + \phi - 90^\circ)$, donde V es la amplitud de tensión, ωt está expresado en radianes y ϕ en grados, por tanto, podemos conocer en cada instante el valor del voltaje.

Tensión de pico Es la tensión máxima instantánea que se alcanza en el ciclo V_p . Dentro de este ciclo aparecen dos valores de pico: El del semiciclo positivo ($+V_p$) y el del semiciclo negativo ($-V_p$).

Tensión de pico a pico Tensión entre los dos valores. Se representa usualmente por V_{pp} . Este es igual a $V_{pp} = 2V_p$.



Tensión media Es el valor medio de tensión. Si la onda es simétrica respecto al eje de tiempos, o sea, la magnitud del semiciclo positivo es igual a la del negativo, entonces el valor medio resultante del ciclo completo es cero.

Tensión eficaz Este concepto está relacionado con la capacidad energética que puede desarrollar una corriente alterna en comparación con una corriente continua. Por cuestiones de tipo de eficiencia energética, se hace necesario conocer el valor de tensión (o corriente) alterna que pueda desarrollar la misma potencia eléctrica que una tensión continua del mismo valor; a este valor se denomina valor eficaz.

El cálculo del valor eficaz de una señal se determina mediante la relación

$$Y_{ef} = \sqrt{\frac{1}{T} \int_0^T [f(t)]^2 dt}$$

Si aplicamos esta definición a nuestra onda sinusoidal tenemos la característica que:

$$I_{ef} = \frac{I_{max}}{\sqrt{2}} \quad I_{ef} = \frac{I_{max}}{\sqrt{2}}$$

4.3. Elementos eléctricos: Condensador y Bobina

Aún nos faltan por definir dos elementos eléctricos esenciales: los condensadores y las bobinas. Ambos son elementos eléctricos capaces de almacenar energía.

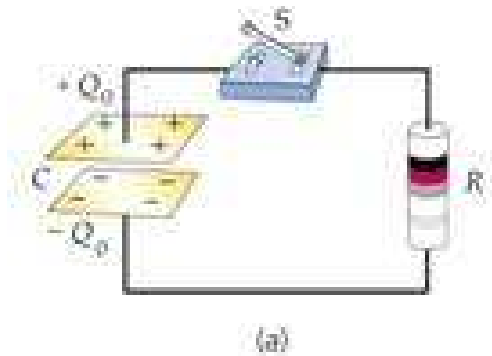
4.3.1. Condensador

Dispositivo que sirve para almacenar carga y energía. Está constituido por dos conductores aislados uno de otro, que poseen cargas iguales y opuestas. La característica principal de estos dispositivos es su capacidad de almacenar carga bajo determinadas condiciones de diferencia de potencial. La relación Q/V recibe el nombre de capacidad. La unidad S.I. para medir la capacidad es el Faradio (F), denominado así en honor al gran físico experimental inglés, Michael Faraday.

Existen diversos tipos de condensadores atendiendo a su morfología.

Condensador de placas plano paralelas

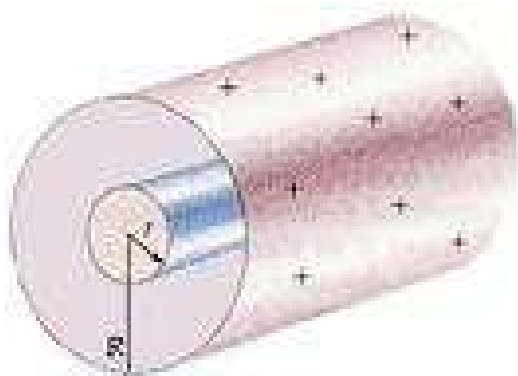
$$C = \varepsilon \frac{A}{S}$$



donde A es el área de las placas plano paralelas y S es la separación entre placas y ϵ es la permitividad del material existente entre placas.

Condensador cilíndrico

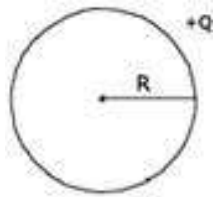
$$C = 2\pi\epsilon \frac{L}{\ln(R/r)}$$



donde L es la longitud del condensador cilíndrico, r radio interior del conductor y R radio externo del conductor y ϵ es la permitividad del material existente entre los conductores. Naturalmente, el potencial es mayor en el conductor interno, el cual transporta la carga positiva, pues las líneas del campo eléctrico están dirigidas desde este conductor hacia el exterior.

Condensador esférico

$$C = 4\pi\epsilon R$$



donde R es el radio de la esfera y ε es la permitividad del material existente dentro de la esfera.

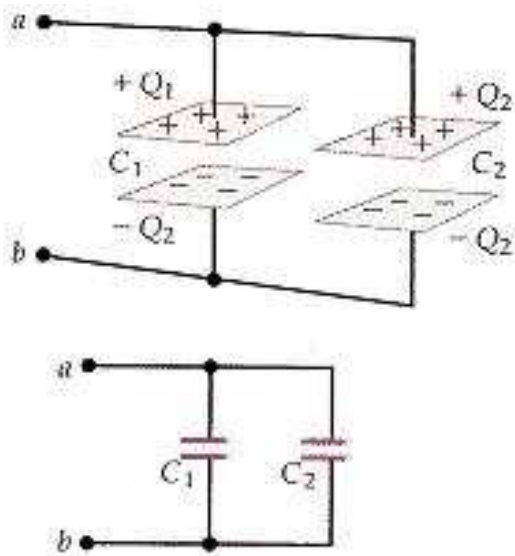
Otros parámetros a tener en cuenta a parte de la capacidad es la tensión máxima que puede soportar, su tolerancia expresado en %, corriente de fuga (se refiere a una corriente muy pequeña que podría pasar a través del dieléctrico al estar sometido a tensión eléctrica. Idealmente, como es obvio, dicha corriente debería ser cero) y la temperatura de trabajo, pues, puede afectar negativamente a las características del condensador. En general, debe procurarse que los condensadores queden alejados de fuentes de calor. $\epsilon_0 = 8,85pF/m$

Existen principalmente dos posibilidades en cuanto a las combinaciones de condensadores:

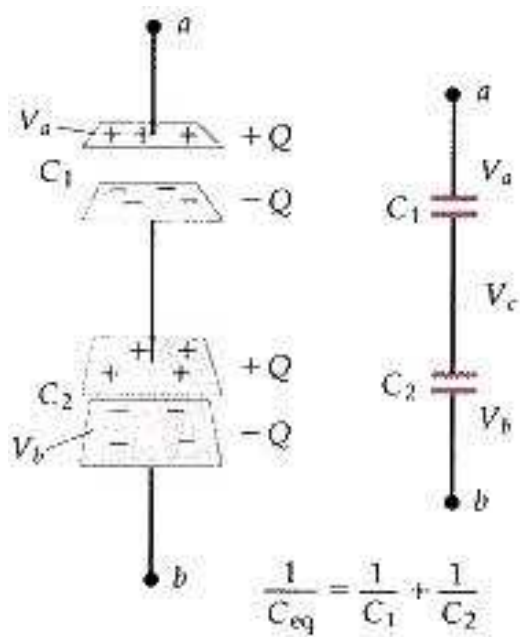
Conectados en paralelo La característica fundamental es que los condensadores están sometidos al mismo potencial, y la carga total almacenada es la suma de la carga almacenada en cada uno de los condensadores, por tanto

$$Q = Q_1 + Q_2 = C_1V + C_2V = (C_1 + C_2)V$$

$$C_{equiv} = \sum_i C_i$$



Conectados en serie Cuando los puntos a y b se conectan a los terminales de una batería, se establece una diferencia de potencial entre los dos condensadores, pero la diferencia de potencial a través de uno de ellos no es necesariamente la misma que a través del otro. Si una carga $+Q$ se deposita sobre la carga superior, del primer condensador, el campo eléctrico producido por dicha carga inducirá una carga negativa igual $-Q$ sobre su placa inferior. Esta carga procede de los electrones extraídos de la placa superior del segundo condensador. Por tanto, existirá una carga igual $+Q$ en la placa superior del segundo condensador y una carga correspondiente $-Q$ en su placa inferior.

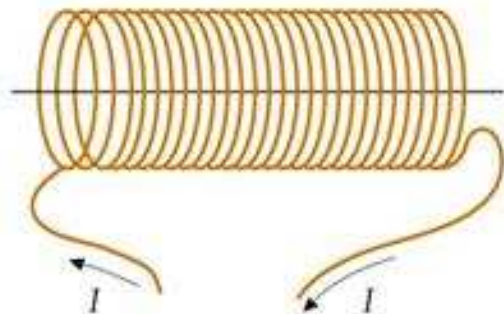


Operando nos queda que,

$$\frac{1}{C_{equiv}} = \sum_i \frac{1}{C_i}$$

4.3.2. Bobina

Se denomina bobina a un sistema formado por N espiras o vueltas, donde las dimensiones de la espira son generalmente despreciables frente a su longitud. Existe una relación entre el flujo que atraviesa dicho sistema debido al paso de corriente por el mismo y la propia corriente. Esta constante se denomina autoinducción de la espira y se denota por L . Como en el caso del condensador la autoinducción depende de la forma geométrica de la espira. La unidad S.I. de inductancia es el henrio (H).



$$L = \frac{\phi_m}{I} = \mu n^2 Al$$

donde es n la densidad de espiras de la bobina, A es la sección de las espiras y l la longitud de la bobina, y μ permeabilidad del material dentro de la bobina.

De forma análoga al caso de los condensadores, podemos determinar las resultantes de combinar las bobinas en serie y en paralelo, de modo que podemos concluir lo siguiente:

Serie $L_{eq} = \sum_i L_i$

Paralelo $\frac{1}{L_{eq}} = \sum_i \frac{1}{L_i}$

4.4. Respuestas de los elementos eléctricos

En la siguiente tabla presentamos a modo de resumen las relaciones entre voltaje y corriente de los elementos: resistencias, bobinas y condensadores

Elemento	S.I.	Voltaje	Corriente	Potencia
Resistencia	Ω	$v = Ri$	$i = \frac{v}{R}$	$p = vi = i^2 R$
Bobina	H	$v = L \frac{di}{dt}$	$i = \frac{1}{L} \int v dt + cte$	$p = vi = Li \frac{di}{dt}$
Condensador	F	$v = \frac{1}{C} \int i dt + cte$	$i = C \frac{dv}{dt}$	$p = vi = Cv \frac{dv}{dt}$

Tabla sobre la respuesta de los elementos en corriente (o tensión alterna).

Elemento		$i = I \sin(\omega t)$	$i = I \cos(\omega t)$
Resistencia	R	$v_R = RI \sin(\omega t)$	$v_R = RI \cos(\omega t)$
Bobina	L	$v_L = \omega LI \sin(\omega t + 90^\circ)$	$v_L = \omega LI \cos(\omega t + 90^\circ)$
Condensador	C	$v_C = \frac{I}{\omega C} \sin(\omega t - 90^\circ)$	$v_C = \frac{I}{\omega C} \cos(\omega t - 90^\circ)$
		$v = V \sin(\omega t)$	$v = V \cos(\omega t)$
Resistencia	R	$i_R = \frac{V}{R} \sin(\omega t)$	$i_R = \frac{V}{R} \cos(\omega t)$
Bobina	ωL	$i_L = \frac{V}{\omega L} \sin(\omega t - 90^\circ)$	$i_L = \frac{V}{\omega L} \cos(\omega t - 90^\circ)$
Condensador	ωC	$i_C = \omega VC \sin(\omega t + 90^\circ)$	$i_C = \omega VC \cos(\omega t + 90^\circ)$

4.5. Notación fasorial

Un fasor es un vector que gira en dirección contraria a las manecillas del reloj, cuyo módulo es la amplitud de la curva cosenoidal¹; el ángulo del

¹A partir de ahora se considera como base de representación de los fasores la función coseno. Si una expresión de voltaje y/o corriente está en forma de seno, podrá cambiarse a un coseno mediante la substracción de 90° a la fase

fase es la diferencia de fase y éste se mueve con velocidad angular constante (rd/seg).

Los favores pueden ser representados por los números complejos, y por tanto, haremos uso de éstos para su tratamiento matemático.

NOTA:

$$\sin(a \pm b) = \sin(a) \cos(b) \pm \cos(a) \sin(b)$$

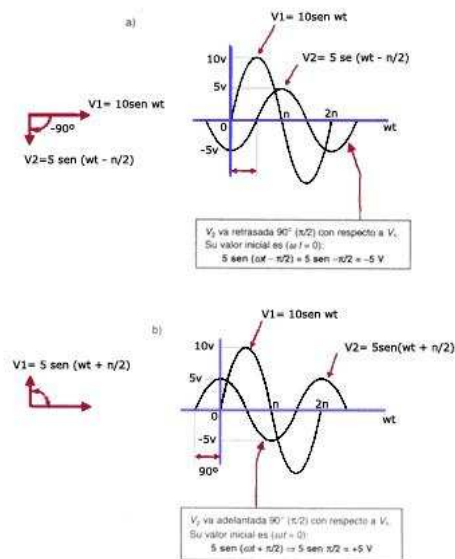
$$\cos(a \pm b) = \cos(a) \cos(b) \pm \sin(a) \sin(b)$$

Las notaciones más habituales de uso para un fador en estos casos son:

Forma polar $V = V \angle \theta$ (Multiplicación y división)

Forma rectangular $V = V \cos \theta + jV \sin \theta$ (Suma y resta)

Forma exponencial $V = V e^{j\theta}$



4.6. Impedancia

La razón entre V e I se define como impedancia Z . Las unidades de la impedancia en el S.I. son el ohmio (Ω). Teniendo en cuenta la notación rectangular, las impedancias de los diferentes elementos son:

de una Resistencia: $Z_R = R + j0\Omega$

de una Bobina: $Z_L = 0 + j\omega L\Omega$

de un Condensador: $Z_C = 0 + \frac{1}{j\omega C}\Omega = -j\frac{1}{\omega C}\Omega$

En este tipo de notación, donde la impedancia viene representada por una notación compleja, la parte real del complejo es el término resistivo o de resistencia (R), mientras que la parte imaginaria corresponde a la reactancia (X_L, X_C) inductiva o capacitiva según provenga de una bobina o condensador respectivamente.

Una alternativa a la notación rectangular es la notación polar,

de una Resistencia: $Z_R = R|0^\circ \Omega$

de una Bobina: $Z_L = \omega L|90^\circ \Omega$

de un Condensador: $Z_C = \frac{1}{\omega C}|-90^\circ \Omega$

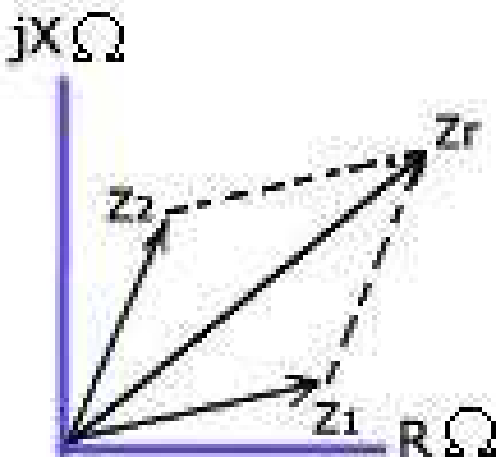
Puesto que los elementos eléctricos pueden asociarse tanto en serie como en paralelo, podemos definir una equivalencia con respecto a las combinaciones de impedancias, análogo al caso de las resistencias en el caso contrario, por tanto:

Serie $Z_{eq} = Z_1 + Z_2 + \dots$

Paralelo $\frac{1}{Z_{eq}} = \frac{1}{Z_1} + \frac{1}{Z_2} + \dots$

4.6.1. Diagrama de impedancia

En un diagrama de impedancia, una impedancia se representa como un complejo, donde el eje horizontal corresponde a los términos resistivos mientras que en el eje vertical se representan los términos de reactancia inductiva (semieje positivo) como reactancia capacitiva (semieje negativo).



4.7. Admitancia

La admitancia se define como la recíproca de la impedancia, o sea $Y = Z^{-1}$, con unidades de siemens (S). En forma similar es un número complejo, $Y = G + jB$, cuya parte real se le denomina la conductancia G y la parte imaginaria la susceptancia B .

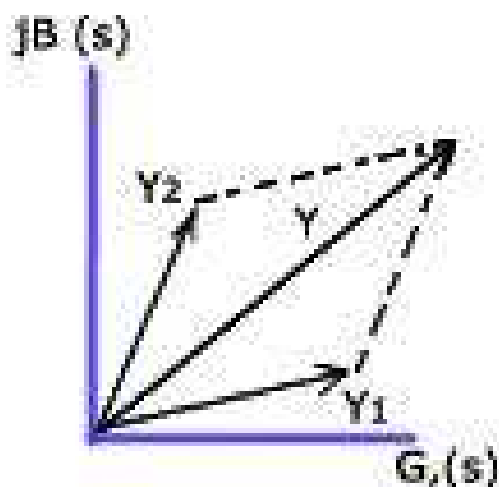
En este caso las combinaciones de admitancias en serie y en paralelo pueden expresarse como:

Serie $\frac{1}{Y_{eq}} = \frac{1}{Y_1} + \frac{1}{Y_2} + \dots$

Paralelo $Y_{eq} = Y_1 + Y_2 + \dots$

4.7.1. Diagrama de admitancia

En un diagrama de admitancia, una admitancia se representa como un complejo, donde el eje horizontal corresponde a los términos conductivos mientras que en el eje vertical se representan los términos de susceptancia capacitiva (semieje positivo) como susceptancia inductiva (semieje negativo).



4.8. Métodos de resolución por mallas y nodos

El procedimiento es totalmente análogo al caso de la resolución de circuitos en corriente continua salvo que ahora la matriz de resistencia del sistema corresponde a la matriz de impedancias del sistema en el caso de res-

olución de mallas o el de la matriz de admitancias en el caso de resolución por nodos.

4.8.1. Método de mallas

- Simplificamos el circuito en lo posible.
- El número de ecuaciones a plantear será igual al número de mallas existentes en el circuito de forma no redundante.

$$\begin{bmatrix} Z_{11} & Z_{12} & Z_{13} \\ Z_{12} & Z_{22} & Z_{23} \\ Z_{13} & Z_{22} & Z_{33} \end{bmatrix}$$

En esta matriz debemos tener las siguientes consideraciones:

1. Las posiciones ii son la suma algebraica de las impedancias pertenecientes a la malla i .
2. Las posiciones ij son la suma algebraica de las impedancias comunes a la malla i y a la malla j .
3. A estos últimos términos se les asignará un signo negativo si las intensidades que recorren las correspondientes mallas al pasar por el elemento común, van en sentido contrario, y signo positivo en caso contrario.

- Construimos el vector de voltajes.

$$\begin{bmatrix} V_1 \\ V_2 \\ V_3 \end{bmatrix}$$

V_i será la suma de las *fem* de los generadores que pertenezcan a la malla i . Si el voltaje impulsa en la dirección de la corriente asignada a la malla i entonces tendrá valor positivo, en caso contrario se le asignará un valor negativo.

- Deberemos resolver el siguiente sistema:

$$\begin{bmatrix} Z_{11} & Z_{12} & Z_{13} \\ Z_{12} & Z_{22} & Z_{23} \\ Z_{13} & Z_{22} & Z_{33} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} I_1 \\ I_2 \\ I_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} V_1 \\ V_2 \\ V_3 \end{bmatrix}$$

4.8.2. Método de nodos

- Simplificamos el circuito en lo posible.
- El número de ecuaciones será igual al número de mallas independientes menos 1.
- Tomaremos además un nodo como referencia.
- Las incógnitas que vamos a hallar son los voltajes en los nodos.
- Construir la matriz de admitancias del sistema (para un sistema de 2 nodos tendremos un sistema 2x2).

$$\begin{bmatrix} Y_{11} & -Y_{12} \\ -Y_{12} & Y_{22} \end{bmatrix}$$

En esta matriz debemos tener las siguientes consideraciones:

1. I_i es el resultado algebraico de las corrientes impulsoras asociadas a cada rama que esté conectada al nodo i , bien por fuentes de corrientes, bien procedentes de la *fem* de un generador o pila con la impedancia en serie asociada perteneciente a la misma rama.
 2. Tomaremos siempre un sentido de I_i que salga siempre desde el polo positivo en el caso de una pila o generador o bien el indicado en el caso de una fuente de corriente. Si el sentido va hacia el nodo i , entonces I_i será considerado positivo, y negativo en caso contrario.
- Plantear la ecuación matricial y resolver el sistema de ecuaciones.

$$\begin{bmatrix} Y_{11} & -Y_{12} \\ -Y_{12} & Y_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} V_1 \\ V_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} I_1 \\ I_2 \end{bmatrix}$$

4.9. Impedancias de entrada y transferencia

Se define la impedancia de entrada como

$$Z_{ent,r} = \frac{V_r}{I_r} = \frac{\Delta_Z}{\Delta_{rr}}$$

donde Δ_{rr} es el cofactor de Z_{rr} en Δ_Z .

Se define la impedancia de transferencia entre la malla r y la malla s como

$$Z_{transf,rs} = \frac{V_r}{I_s} = \frac{\Delta_Z}{\Delta_{rs}}$$

donde Δ_{rs} es el cofactor de Z_{rs} en Δ_Z .

4.10. Admitancias de entrada y transferencia

Se define la admitancia de entrada como

$$Y_{ent,r} = \frac{I_r}{V_r} = \frac{\Delta_Y}{\Delta_{rr}}$$

Se define la admitancia de transferencia entre la malla r y la malla s como

$$Y_{transf,rs} = \frac{I_r}{V_s} = \frac{\Delta_Y}{\Delta_{rs}}$$

donde Δ_{rs} es el cofactor de Z_{rs} en Δ_Z .

4.11. Teoremas de Thevenin y de Norton

Presentan el mismo formato que hemos definido estos teoremas para el caso continuo. El conjunto de componentes entre dos puntos de un circuito, en el cual pueden encontrarse diversos generadores y resistencias, tiene por equivalente a un circuito formado simplemente por un solo generador y una impedancia en serie (V_{Th} , Z_{Th}).

Votaje Thevenin La tensión Thevenin, V_{Th} , es la que aparece entre los terminales de carga (salida), con la carga Z_L desconectada, o sea, en el vacío. Este valor se puede obtener teóricamente por cálculo, o bien, midiendo con un voltímetro, si se trata de un circuito práctico.

Impedancia Thevenin Es el valor de impedancia que aparece en los terminales de salida (sin la carga) considerando al generador (o generadores) con tensión igual a cero. El valor de Z_{Th} se puede calcular teóricamente o en la práctica mediante el uso de un óhmetro.

En el caso del teorema de Norton el conjunto de componentes entre dos puntos de un circuito, en el cual pueden encontrarse diversos generadores e impedancias, tiene por equivalente a un circuito formado simplemente por una única fuente de intensidad y una impedancia en paralelo a ésta (I_{No} , Z_{No}).

Impedancia Norton Es la misma que para el caso del circuito equivalente Thevenin.

Intensidad Norton Partiendo del equivalente Thevenin, corresponde a:

$$I_{No} = \frac{V_{Th}}{Z_{Th}}$$

4.12. Principio de superposición

El principio de superposición establece que la respuesta de cualquier elemento de una red lineal que contenga más de una fuente es la suma de las respuestas producidas por las fuentes, actuando cada una sola.

4.13. Potencia y factor de potencia

La potencia instantánea en la red o circuito es el producto entre voltaje e intensidad de la corriente puede expresarse como $p(t) = v(t)i(t)$ tal como ya hemos visto. Una potencia positiva corresponde a una transferencia de energía de la fuente a la red, mientras que, una potencia negativa representa un retorno de energía de la red a la fuente. La potencia promedio para una red pasiva será siempre cero o positiva, será cero tan sólo cuando la red contenga elementos reactivos.

Veamos el siguiente caso general:

Sea $v = V_m \cos(\omega t)$ y resulta que la corriente tiene una expresión general $i = I_m \cos(\omega t - \theta)$ donde θ puede ser negativa o positiva. Supongamos que θ sea negativa (corriente adelantada respecto al voltaje), entonces la potencia la podemos expresar como:

$$p(t) = V_m I_m \cos(\omega t) \cos(\omega t - \theta) = \frac{1}{2} V_m I_m [\cos \theta + \cos(2\omega t - \theta)]$$

Si lo que queremos es determinar el valor promedio, tenemos que

$$P_m = \frac{1}{2} V_m I_m \cos \theta$$

como $V_{ef} = \frac{V_m}{\sqrt{2}}$ e $I_{ef} = \frac{I_m}{\sqrt{2}}$, tenemos que la potencia promedio puede ser expresada como

$$P_m = I_{ef} V_{ef} \cos \theta$$

Definimos:

Potencia aparente: $I_{ef}V_{ef}$

Factor de potencia: $\cos \theta$

- Si la corriente atrasa respecto al voltaje, $\theta > 0$, el factor de potencia se dice que atrasa.
- La corriente se adelanta respecto al voltaje, $\theta < 0$, el factor de potencia se dice que adelanta.

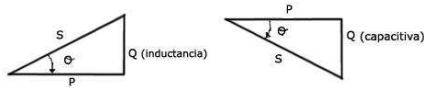
Triángulo de potencia ■ Potencia aparente: $S = V_{ef}I_{ef} = I_{ef}^2 Z$

- Potencia promedio: $P_m = V_{ef}I_{ef} \cos \theta = I_{ef}^2 R$
- Factor de potencia: $fp = \cos \theta = R/Z$

Tenemos que tanto S como P pueden representarse geoméricamente como la hipotenusa y el cateto horizontal de un triángulo rectángulo. Al cateto vertical se le denomina potencia en cuadratura² y corresponde en este caso a

$$Q = V_{ef}I_{ef} \sin \theta = I_{ef}^2 X$$

Por razones de comodidad, todas las cantidades relacionadas con la potencia pueden derivarse de la potencia compleja $S = S[\theta = P + iQ$ o bien $S = I_{ef}^2 Z$.



²Se acostumbra a que Q siempre se de en valor absoluto, y se le denomina inductivo o capacitivo en función del signo (si el valor es negativo tiene carácter capacitivo, y carácter inductivo en caso contrario).

Capítulo 5

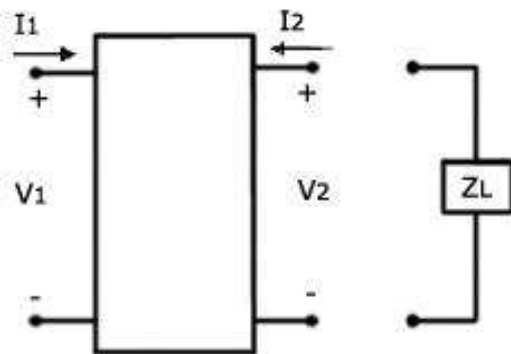
Respuesta a la frecuencia y resonancia en circuitos eléctricos

5.1. Respuesta a la frecuencia

Por respuesta a la frecuencia de una red o circuito se entiende su comportamiento sobre un intervalo de frecuencias.

5.2. Redes de 2 puertas

Una red de dos puertas es aquella que presenta dos pares de terminales, una considerada de entrada y la otra como terminal de salida. En la primera están definidos un voltaje V_1 y una corriente I_1 mientras que en la segunda terminal están definidos un voltaje V_2 y una corriente I_2 .



En la red de dos puertas la conexión de salida debe definirse como:

- (i) circuito abierto, $I_2 = 0$
- (ii) circuito en corto, $V_2 = 0$
- (iii) impedancia de carga aplicada $V_2 = -I_2 Z_L$

Las funciones de frecuencia más usuales para el estudio de las redes de dos puertas son:

- Impedancia de entrada $\frac{V_1}{I_1} = Z_{ent}(w) = H_Z(w)$
- Razón de voltajes $\frac{V_2}{V_1} = H_V(w)$
- Razón de intensidades $\frac{I_2}{I_1} = H_I(w)$
- Impedancias de transferencia $\frac{V_2}{I_1}$ y $\frac{V_1}{I_2} = H(w)$

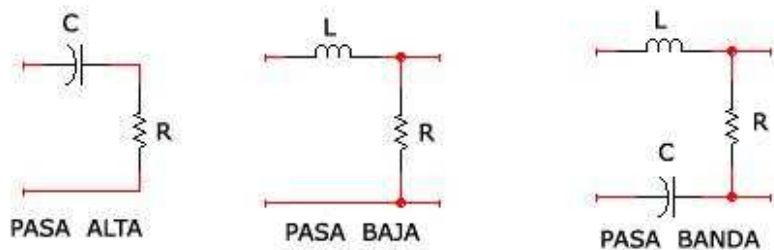
5.3. Filtros: Redes de pasa altas, de pasa bajas y pasa banda:

Estudiaremos la razón de voltajes de algunos circuitos de 2 puertas en función de la frecuencia.

Si $|H_V|$ disminuye conforme aumenta la frecuencia, el comportamiento se llama caída de impedancia a alta frecuencia y el circuito es una red de tipo paso bajo.

Por el contrario, si $|H_V|$ disminuye cuando disminuye la frecuencia estamos en el caso de una red pasa baja, es decir, tenemos una caída de impedancia a baja frecuencia.

Existe además sistemas que presentan un comportamiento mixto de las dos anteriores, es decir, sólo en un rango de frecuencias $|H_V|$ toma valores considerables. A este tipo de sistemas se les conoce con el nombre de redes pasa banda.



5.4. Frecuencia de potencia media

Se denomina frecuencia de potencia media a la frecuencia la cual

$$|H_V| = 0,707 |H_V|_{max}$$

De manera muy general, cualquier función de red no constante $H(w)$ alcanzará su valor absoluto más grande en alguna frecuencia única w_x . En muchos casos, existirán dos frecuencias de potencia media que verifiquen la expresión anterior: una posterior y otra anterior a la frecuencia de pico. A la separación de ambas frecuencias se le denomina ancho de banda (β) y sirve como medida de lo agudo del pico.

5.5. Circuitos resonantes

El fenómeno de resonancia en una red eléctrica, está originado por la presencia de elementos reactivos en la misma, es decir, de bobinas y de condensadores.

La reactancia inductiva ($X_L = wL$) aumenta si la frecuencia aumenta, mientras que la reactancia capacitiva ($X_C = \frac{1}{wC}$) disminuye si la frecuencia aumenta. Este comportamiento de los elementos inductivos y capacitivos permite neutralizar a una frecuencia determinada las reactancias inductivas y capacitivas conectadas en serie así como las susceptancias de condensadores y bobinas conectadas en paralelo.

Por esta causa, al excitar un circuito que contenga este tipo de elementos, la respuesta que se obtiene dependerá de la frecuencia de la señal de excitación.

Las frecuencias a las cuales se producen máximos de respuesta se denominan frecuencias de resonancia. Los sistemas pueden presentar una única frecuencia de resonancia (resonancia simple) o múltiples frecuencias de resonancia (resonancia múltiple).

El comportamiento del sistema viene caracterizado por dos parámetros fundamentales:

5.5.1. Frecuencia de resonancia f_0

Es la frecuencia a la que se obtiene un máximo en la respuesta (V ó I). Otra definición análoga podría ser:

- (i) Los valores máximos de las energías almacenadas en las bobinas y en los condensadores son máximos.

- (ii) La impedancia o admitancia de entrada de la red es real (I y V están en fase).

5.5.2. Factor de calidad del circuito Q

Es un indicativo de la eficacia con que se almacena energía en un circuito. Se define como:

$$Q = 2\pi \frac{\text{Energía máxima almacenada}}{\text{Energía disipada en un periodo}} = 2\pi \frac{W_{max}}{PT} = \omega \frac{W_{max}}{P}$$

donde W_{max} es el valor máximo de energía almacenada en el circuito (suma de las energías almacenadas por las bobinas y los condensadores) y P es la potencia disipada por las resistencias que forman el circuito.

En circuitos resonantes, el factor de calidad se define a la frecuencia de resonancia.

El ancho de banda (β) en función del factor de calidad se puede expresar como

$$\beta = \frac{f_0}{Q}$$