Tema 4

Ecuaciones diferenciales lineales con coeficientes constantes

Una ecuación diferencial lineal de orden n tiene la forma

$$a_0(x)y^{(n)} + a_1(x)y^{(n-1)} + \cdots + a_{n-1}(x)y' + a_n(x)y = b(x) \tag{4.1}$$

Vamos a presuponer que $a_0(x) \neq 0$ para todo x, de modo que estudiaremos las ecuaciones diferenciales lineales de la forma

$$y^{(n)} + a_1(x)y^{(n-1)} + \cdots + a_{n-1}(x)y' + a_n(x)y = b(x) \tag{4.2}$$

Definición 1 *La ecuación diferencial lineal* 4.2 *se dice que es* homogénea *si* $b(x) = 0$. *En caso contrario se dice que es* completa *o* no homogénea.

A menudo denotaremos por $L(y)$ o $L[y]$ al primer miembro de 4.2

$$\begin{aligned} L(y) = L[y] &= y^{(n)} + a_1(x)y^{(n-1)} + \cdots + a_{n-1}(x)y' + a_n(x)y \\ &= \big(D^n + a_1(x)D^{n-1} + \cdots a_{n-1}(x)D + a_n(x)\big)\, y \end{aligned}$$

donde en este último caso $D = \frac{d}{dx}$ se utiliza como un ente algebraico[1]. Así se puede representar la ecuación diferencial lineal homogénea por $L[y] = 0$, donde $L[]$ es un *operador lineal*, i.e.

$$L\left[c_1\varphi_1(x) + c_2\varphi_2(x)\right] = c_1L[\varphi_1(x)] + c_2L[\varphi_2(x)] \tag{4.3}$$

En este tema estudiaremos las ecuaciones diferenciales lineales con coeficientes constantes, i.e. $a_1(x), \ldots, a_n(x)$ son constantes.

Comenzaremos estudiando el caso particular de las ecuaciones diferenciales lineales de segundo orden ($n = 2$) y luego lo generalizaremos para n cualquiera.

Estudiaremos en primer lugar la ecuación homogénea, puesto que la resolucióin de la ecuación no homogénea se basa en el método de resolución de la ecuación homogénea.

[1]Esto proviene el Cálculo Operacional de O. Heaviside.

4.1. Ecuación homogénea

Una ecuación diferencial lineal homogénea de segundo orden tiene la forma

$$L[y] = y'' + a_1 y' + a_2 y = 0 \tag{4.4}$$

donde $a_1, a_2 \in \mathbb{R}$ y $b(x)$ es una función contínua en un intervalo $I \subset \mathbb{R}$.

La ecuación diferencial lineal homogénea de primer orden $y' + ay = 0$ tiene solución, como ecuación diferencial ordinaria de variables separadas, $y = ce^{-ax}$.

Sería bueno buscar soluciones exponenciales para 4.4. Basándose en esa idea se trata de buscar soluciones del tipo $y = e^{rx}$, que substituyendo en 4.4 queda

$$\begin{aligned} L[e^{rx}] &= r^2 e^{rx} + a_1 r e^{rx} + a_2 e^{rx} \\ &= e^{rx}\left(r^2 + a_1 r + a_2\right) = 0 \end{aligned}$$

Debido a que $e^{rx} \neq 0$, se tendrán soluciones para las raíces del *polinomio característico* $q(r) = r^2 + a_1 r + a_2$. Este polinomio tendrá dos soluciones r_1, r_2. Consideramos las tres posibilidades:

- Si r_1, r_2 son reales y $r_1 \neq r_2$ se tiene que las soluciones de 4.4 son

$$\begin{aligned} \varphi_1(x) &= e^{r_1 x} \\ \varphi_2(x) &= e^{r_2 x} \end{aligned}$$

- Si $r_1 = r_2$ son reales, entonces las solución de 4.4 son

$$\begin{aligned} \varphi_1(x) &= e^{r_1 x} \\ \varphi_2(x) &= x \cdot e^{r_1 x} \end{aligned}$$

- Si r_1, r_2 son complejas conjugadas, $r_1 = \alpha + i\beta$, $r_2 = \alpha - i\beta$, $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$, entonces las soluciones de 4.4 son

$$\begin{aligned} \varphi_1(x) &= e^{ax} \cos bx \\ \varphi_2(x) &= e^{ax} \operatorname{sen} bx \end{aligned}$$

Nótese que las soluciones son linealmente independientes, según se entiende por la siguiente definición

Definición 2 *Dadas $\varphi_1(x), \ldots, \varphi_n(x)$ funciones definidas en un intervalo $I \subset \mathbb{R}$, se dice que son* linealmente independientes *si se verifica que para todo x*

$$c_1\varphi_1(x) + \cdots + c_n\varphi_n(x) \quad \Rightarrow \quad c_1 = \cdots = c_n = 0 \tag{4.5}$$

donde $c_1, \ldots, c_n \in \mathbb{R}$

Para resolver una ecuación diferencial lineal de orden n se necesitan n condiciones generales. En general, dada una $f(x,y,y')=0$ si la desarrollamos en serie de potencias en un entorno de un punto x_0,

$$y(x)=y(x_0)+\frac{y'(x_0)}{1!}(x-x_0)+\frac{y''(x_0)}{2!}(x-x_0)^2+\cdots+\frac{y^{(n)}(x_0)}{n!}(x-x_0)^n+\cdots \tag{4.6}$$

Dada la condición inicial $f(x_0,y_0,y'(x_0))=0$ se puede despejar y'. Una vez conocida y', con otra condición inicial adicional se podría despejar y'', y con otra más se podría despejar y'''. Así, para una ecuación diferencial lineal de orden n se necesitan n condiciones iniciales.

Dado que toda solución de una ecuacion diferencial lineal es combinación lineal de soluciones de la misma, la solución general será una combinación lineal de soluciones linealmente independientes.

Proposición 1 *Dado el Problema de Cauchy para cualquier* $x_0\in\mathbb{R}$

$$PC\equiv\begin{cases} y''+a_1y'+a_2y=0 \\ y(x_0)=y_0=\alpha \\ y'(x_0)=y_0'=\beta \end{cases}$$

siempre existe solución (única) cualesquiera que sean los parámetros α, β.

Definición 3 *Sean* $\varphi_1(x),\ldots,\varphi_n(x)$ *funciones* $(n-1)$*-derivables, se define el* Wronskiano *como*

$$W(\varphi_1,\ldots,\varphi_n)=\begin{vmatrix} \varphi_1(x) & \varphi_2(x) & \cdots & \varphi_n(x) \\ \varphi_1'(x) & \varphi_2'(x) & \cdots & \varphi_n'(x) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \varphi_1^{(n-1)}(x) & \varphi_2^{(n-1)}(x) & \cdots & \varphi_n^{(n-1)}(x) \end{vmatrix} \tag{4.7}$$

También suele denotarse como $W(\varphi_1,\ldots,\varphi)(x)$, $W\left[\varphi_1(x),\ldots,\varphi_n(x)\right]$ ó $W(x)$.

Proposición 2 *Sean* $\varphi_1(x),\varphi_2(x)$ *soluciones de la ecuación* $y''+a_1y'+a_2y=0$ *con* $x\in I$ *un intervalo,* $a_1,a_2\in\mathbb{R}$. *Entonces*

$\varphi_1(x),\varphi_2(x)$ *son linealmente independientes si y sólo si* $W(\varphi_1,\varphi_2)(x)\neq 0 \quad \forall\, x\in I$

Proposición 3 (Fórmula de Jacobi-Liouville) *Sean* $\varphi_1(x),\varphi_2(x)$ *soluciones de la ecuación* $y''+a_1y'+a_2y=0$, $x_0\in I$, *entonces*

$$W(\varphi_1,\varphi_2)(x)=W(\varphi_1,\varphi_2)(x_0)e^{-a_1(x-x_0)} \tag{4.8}$$

Nótese que si $\exists\, x_0\in I$ tal que $W(\varphi_1,\varphi_2)(x_0)=0$, entonces $W(\varphi_1,\varphi_2)(x)=0 \quad \forall\, x\in I$, esto es, o se anula $W(\varphi_1,\varphi_2)(x)$ en todo I o no se anula en ningún $x\in I$.

En general,

$$\frac{d}{dx}\left(W(\varphi_1,\ldots,\varphi_n)\right)=\begin{vmatrix} \varphi_1(x) & \varphi_2(x) & \cdots & \varphi_n(x) \\ \varphi_1'(x) & \varphi_2'(x) & \cdots & \varphi_n'(x) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \varphi_1^{(n-2)}(x) & \varphi_2^{(n-2)}(x) & \cdots & \varphi_n^{(n-2)}(x) \\ \varphi_1^{(n)}(x) & \varphi_2^{(n)}(x) & \cdots & \varphi_n^{(n)}(x) \end{vmatrix} \tag{4.9}$$

Proposición 4 *Sean $\varphi_1(x), \varphi_2(x)$ dos funciones. Si $\varphi_1(x), \varphi_2(x)$ son linealmente dependientes, entonces $W(\varphi_1, \ldots, \varphi_n)(x) = 0$.*

Nótese que el recíproco no es necesariamente cierto; no se puede garantizar que si $W(\varphi_1, \ldots, \varphi_n)(x) = 0$ entonces $\varphi_1(x), \varphi_2(x)$ son linealmente dependientes. Lo que sí es cierto es que si $W(\varphi_1, \ldots, \varphi_n)(x_0) \neq 0$ en cierto x_0, entonces $\varphi_1(x), \varphi_2(x)$ son linealmente independientes.

Proposición 5 *Sean $\varphi_1(x), \varphi_2(x)$ funciones en el intervalo I. Si para todo $x \in I$ se verifica que $W(\varphi_1, \ldots, \varphi_n)(x) = 0$ y $\varphi_2(x) \neq 0$, entonces $\varphi_1(x), \varphi_2(x)$ son linealmente dependientes*

Proposición 6 *El conjunto de soluciones de una ecuación diferencial lineal homogénea de coeficientes constantes de orden n es un espacio vectorial de dimensión n.*

Proposición 7 *Si la ecuación diferencial $y'' + a_1 y' + a_2 y = 0$, $a_1, a_2 \in \mathbb{R}$, tiene una solución compleja $y = u(x) + iv(x)$, entonces $Re(y(x)) = u(x)$ y $Im(y(x)) = v(x)$ son también soluciones.*

Proposición 8 *Sea la ecuación diferencial lineal homogénea real $y'' + a_1 y' + a_2 y = 0$, con $a_1, a_2 \in \mathbb{R}$. Si las condiciones iniciales son reales, entonces la solución general es real.*

Proposición 9 *Sea una ecuación diferencial lineal homogénea $y'' + a_1 y' + a_2 y = 0$, con $a_1, a_2 \in \mathbb{R}$. Dadas las soluciones $\varphi_1(x)$ con las condiones iniciales $y(x_0) = y_{01}, y'(x_0) = y'_{01}$ y $\varphi_2(x)$ con las condiones iniciales $y(x_0) = y_{02}, y'(x_0) = y'_{02}$ se verifica que, si las condiciones iniciales son linealmente independientes, entonces las soluciones $\varphi_1(x), \varphi_2(x)$ son linealmente independientes.*

4.2. Ecuación completa

De forma similar a las ecuaciones diferenciales ordinarias de primer orden, si se tiene una solución general de la ecuación homogénea y una solución particular de la ecuación completa, se obtiene la solución general de la ecuación completa.

Siempre que se tenga y_h la solución general de la ecuacion homogénea y y_c una solución particular de la ecuación completa, $y_h + y_c$ será solución de la ecuación completa.

$$L[y_h(x) + y_c(x)] = L[y_h(x)] + L[y_c(x)] = 0 + b(x) = b(x)$$

Así mismo, la diferencia de dos soluciones particulares y_{c1}, y_{c2} de la ecuación completa, es solución de la ecuación homogénea.

$$L[y_{c1}(x) + y_{c2}(x)] = L[y_{c1}(x)] + L[y_{c2}(x)] = b(x) - b(x) = 0$$

Proposición 10 *El conjunto de las soluciones de una ecuación diferencial lineal completa es un espacio afín con espacio vectorial el conjunto de las soluciones de su ecuación homogénea.*

4.3. Métodos de resolución

Existen varios métodos de resolución de ecuaciones diferenciales lineales completas (y homogéneas). A continuación estudiaremos el método de variación de las constantes y el método de los coeficientes indeterminados.

4.3.1. Método de variación de las constantes

Se trata de determinar $c_1(x), c_2(x)$ tales que $y_p = c_1(x)y_1(x)+c_2(x)y_2(x)$ sea una solución particular de la ecuación completa, donde $y_{gh} = c_1 y_1(x) + c_2 y_2(x)$ es la solución general de la ecuación homogénea. Exigiendo las condiciones

$$\begin{aligned} c_1'(x)y_1(x) + c_2'(x)y_2(x) &= 0 \\ c_1'(x)y_1'(x) + c_2'(x)y_2'(x) &= b(x) \end{aligned}$$

se obtiene que la solución particular de la ecuación completa es

$$y_{pc} = y_2(x)\int \frac{y_1(x)b(x)}{W(x)}dx - y_1(x)\int \frac{y_2(x)b(x)}{W(x)}dx \tag{4.10}$$

donde $W(x) = W(y_1, y_2)(x)$. Si la ecuación fuera de la forma $a_0y'' + a_1y' + a_2y = b(x)$, entonces el coeficiente a_0 aparecería en la solución general

$$y_{pc} = y_2(x)\int \frac{y_1(x)b(x)}{a_0 \cdot W(x)}dx - y_1(x)\int \frac{y_2(x)b(x)}{a_0 \cdot W(x)}dx \tag{4.11}$$

4.3.2. Método de los coeficientes indeterminados

Este método sólo puede aplicarse si $b(x)$ es una exponencial, un polinomio, seno, coseno o combinación de éstas (aditiva o multiplicativa).

$$\begin{aligned} b(x) &= a \cdot e^{bx} \\ b(x) &= P_m(x) \\ b(x) &= a \cdot \cos(qx) \\ b(x) &= b \cdot \operatorname{sen}(qx) \end{aligned}$$

El Principio de Superposición dice que dada la ecuación diferencial lineal $y''+a_1y'+a_2y = f_1(x)+f_2(x)+\cdots+f_n(x)$ la solución general es $y = y_{gh}+y_{p1}+\cdots+y_{pn}$, donde y_{gh} es la solución general de la ecuación homogénea e y_{pi} es una solución particular de $y'' + a_1y' + a_2y = f_i(x)$ para cada $i = 1, \dots, n$.

Según la forma de $b(x) = f_i(x)$ se obtiene una solución particular para la ecuación completa, que debe multiplicarse por x^m donde m es la multiplicidad de la raíz excepcional (si ésta existiera). El cuadro 4.1 resume cómo tratar con las distintas formas de $b(x)$.

Todos estos resultados para ecuaciones diferenciales lineales homogéneas y no homogéneas con coeficientes constantes de segundo grado, pueden generalizarse para un orden n cualquiera.

$b(x)$	y_p	raíz exc.
a	A (xA si la raíz es 0)	0
ax^m	$A_0x^n + \cdots + A_n$	0
$P_n(x)$	$A_0x^n + \cdots + A_n$	0
ae^{mx}	Ae^{mx}	m
$P_n(x)e^{mx}$	$(A_0x^n + \cdots + A_n)e^{mx}$	m
$b\,\mathrm{sen}(qx)$	$A\cos(qx) + B\,\mathrm{sen}(qx)$	$\pm iq$
$a\cos(qx)$	$A\cos(qx) + B\,\mathrm{sen}(qx)$	$\pm iq$
$ae^{px}\,\mathrm{sen}(qx)$	$(A\cos(qx) + B\,\mathrm{sen}(qx))e^{px}$	$p \pm iq$
$ae^{px}\cos(qx)$	$(A\cos(qx) + B\,\mathrm{sen}(qx))e^{px}$	$p \pm iq$
$P_n(x)e^{px}\,\mathrm{sen}(qx)$	$[(A_0x^n + \cdots + A_n)\cos(qx) + (B_0x^n + \cdots + B_n)\,\mathrm{sen}(qx)]e^{px}$	$p \pm iq$
$P_n(x)e^{px}\cos(qx)$	$[(A_0x^n + \cdots + A_n)\cos(qx) + (B_0x^n + \cdots + B_n)\,\mathrm{sen}(qx)]e^{px}$	$p \pm iq$

Cuadro 4.1: Relación de soluciones particulares y_p y sus raíces excepcionales para distintos coeficientes independientes $b(x)$ de la ecuación diferencial lineal completa.

Proposición 11 *Si $r_1, r_2, \ldots, r_s$ son las raíces reales del polinomio característico con orden de multiplicidad $m_1, m_2, \ldots, m_s$ respectivamente, entonces para cada $i = 1, \ldots, s$ las funciones $x^j e^{r_i x} \quad \forall\, j < m_i$ son soluciones de la ecuación $y^{(n)} + a_1 y^{(n-1)} + \cdots + a_{n-1}y' + a_n y = 0$ y la solución general será*

$$y = \varphi(x) = \sum_{i=1}^{s} \sum_{j=0}^{m-1} c_{ij} x^j e^{r_i x} \tag{4.12}$$

con $c_{ij} \in \mathbb{R}$ constantes.

Definición 4 *Un* sistema fundamental *de soluciones es un conjunto de soluciones linealmente independientes cuya combinación lineal es la solución general.*

4.4. Ecuaciones de orden n

Proposición 12 *Si $r_l = \alpha_1 + i\beta_1, \ldots, r_l = \alpha_l + i\beta_l$ son las $2l$ raíces complejas del polinomio característico con orden de multiplicidad $m_1, \ldots, m_l$ respectivamentey $r_{2l+1}, r_{2l+2}, \ldots, r_s$ son las raíces reales del polinomio característico con orden de multiplicidad $m_{2l+1}, m_{2l+2}, \ldots, m_s$,*

$$\begin{array}{llll}
e^{\alpha_1 x}\cos\beta_1 x, & xe^{\alpha_1 x}\cos\beta_1 x, & \ldots, & x^{m_1-1}e^{\alpha_1 x}\cos\beta_1 x \\
e^{\alpha_1 x}\,\mathrm{sen}\,\beta_1 x, & xe^{\alpha_1 x}\,\mathrm{sen}\,\beta_1 x, & \ldots, & x^{m_1-1}e^{\alpha_1 x}\,\mathrm{sen}\,\beta_1 x \\
\vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\
e^{\alpha_n x}\cos\beta_n x, & xe^{\alpha_n x}\cos\beta_n x, & \ldots, & x^{m_n-1}e^{\alpha_n x}\cos\beta_n x \\
e^{\alpha_n x}\,\mathrm{sen}\,\beta_n x, & xe^{\alpha_n x}\,\mathrm{sen}\,\beta_n x, & \ldots, & x^{m_n-1}e^{\alpha_n x}\,\mathrm{sen}\,\beta_n x \\
e^{r_{2l+1}x}, & xe^{r_{2l+1}x}, & \ldots, & x^{m_{2l+1}-1}e^{r_{2l+1}x} \\
\vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\
e^{r_s x}, & xe^{r_s x}, & \ldots, & x^{m_s-1}e^{r_s x}
\end{array}$$

son las $n = \sum_{j=1}^{l} 2m_j + \sum_{j=2l+1}^{s} m_j$ soluciones $\varphi_1(x), \ldots, \varphi_n(x)$, que serán linealmente independientes si y sólo si $W(\varphi_1, \ldots, \varphi_n) \neq 0$.

El conjunto de las soluciones de una ecuación diferencial lineal homogénea de orden n es un espacio vectorial de dimensión n. El conjunto de las soluciones de una ecuación diferencial lineal no homogénea (completa) de orden n es un espacio afín de dimensión n asociado al espacio vectorial del conjunto de las soluciones de la ecuación homogénea asociada.

4.4.1. Método de variación de las constantes

Hemos estado hablando de $y^{(n)} + a_1 y^{(n-1)} + \cdots + a_n y = b(x)$, tenemos la solución general de la ecuación homogénea y_{gh}, necesitamos una solución particular de la completa y_p.

$$\begin{aligned} y_{gh}(x) &= c_1\varphi_1(x) + \cdots + c_n\varphi_n(x) \\ y_p(x) &= c_1(x)\varphi_1(x) + \cdots + c_n(x)\varphi_n(x) \end{aligned}$$

Necesitamos hallar las n funciones $c_1(x), \ldots, c_n(x)$ y para ello necesitamos n condiciones iniciales.

Imponemos las condiciones

$$\begin{aligned} c_1'(x)\varphi_1(x) + \cdots + c_n'(x)\varphi_n(x) &= 0 \\ c_1'(x)\varphi_1'(x) + \cdots + c_n'(x)\varphi_n'(x) &= 0 \\ &\vdots \\ c_1'(x)\varphi_1^{(n-2)}(x) + \cdots + c_n'(x)\varphi_n^{(n-2)}(x) &= 0 \\ c_1'(x)\varphi_1^{(n-1)}(x) + \cdots + c_n'(x)\varphi_n^{(n-1)}(x) &= b(x) \end{aligned}$$

Y obtenemos el sistema

$$\begin{aligned} y_p &= c_1(x)\varphi_1(x) + \cdots + c_n(x)\varphi_n(x) \\ y_p' &= c_1(x)\varphi_1'(x) + \cdots + c_n(x)\varphi_n'(x) \\ &\vdots \\ y_p^{(n-1)} &= c_1(x)\varphi_1^{(n-1)}(x) + \cdots + c_n(x)\varphi_n^{(n-1)}(x) \end{aligned}$$

Substituimos en la ecuación diferencial con las derivadas y obtenemos

$$c_1'(x)\varphi_1^{(n-1)}(x) + \cdots + c_n'(x)\varphi_n^{(n-1)}(x) = b(x) \tag{4.13}$$

Añadiendo esta condición a las $n-1$ anteriormente impuestas, obtenemos un sistema de n ecuaciónes (**¿cuáles?**) con n incógnitas $c_1'(x), \ldots, c_n'(x)$ cuyo determinante es $W(\varphi_1, \ldots, \varphi_n)(x) \neq 0$. Así, las soluciones son

$$c_k'(x) = \frac{W_k(x) \cdot b(x)}{W(\varphi_1, \ldots, \varphi_n)(x)} \tag{4.14}$$

donde W_k tiene $(0, \ldots, 0, 1)$ en la columna k-ésima y el resto de columnas coinciden con $W(\varphi_1, \ldots, \varphi_n)(x)$. Luego,

$$c_k(x) = \int \frac{W_k(x) \cdot b(x)}{W(\varphi_1, \ldots, \varphi_n)(x)} dx \tag{4.15}$$

Así que la solución particular de la ecuación completa será

$$y_p = \sum_{k=1}^{n} \varphi_k(x) \int_{x_0}^{x} \frac{W_k(\xi) \cdot b(\xi)}{W(\varphi_1, \ldots, \varphi_n)(\xi)} d\xi \tag{4.16}$$

Nótese que si la ecuación diferencial es de la forma $a_0 y^{(n)} + a_1 y^{(n-1)} + \cdots + a_n y = b(x)$, entonces en la solución hay que dividir por a_0, i.e.

$$y_p = \sum_{k=1}^{n} \varphi_k(x) \int_{x_0}^{x} \frac{W_k(\xi) \cdot b(\xi)}{a_0 W(\varphi_1, \ldots, \varphi_n)(\xi)} d\xi \tag{4.17}$$

Como siempre, el método de variación de las constantes es teóricamente bonito y se puede aplicar siempre, pero la dificultad estriba en resolver las integrales. Por otra parte, el método de los coeficientes indeterminados, sólo es aplicable para ciertas formas de $b(x)$.