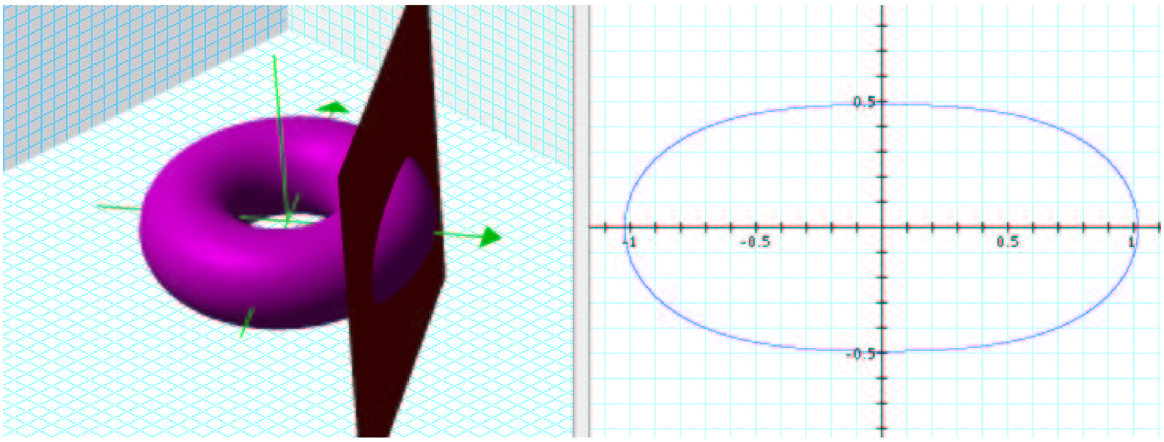
Spira de Perseus

Miguel Ángel Vilela García
<miguev@fmat.ull.es>

4 de octubre de 2005

Unos 200 años después de que Menaechmus construyera las secciones cónicas cortando un cono con un plano, alrededor del año 150 a.C. el matemático griego Perseus investigó las curvas obtenidas al cortar un toro por un plano paralelo al eje revolución del toro [6].

La Spira de Perseus es un caso particular de sección toroidal, en la que el plano de corte es paralelo al eje del toro. Esto es, cualquier sección transversal de un donut cortado con un cuchillo verticalmente desde arriba [7].

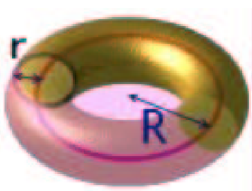


El resultado de estas intersecciones es la familia de curvas denominada *Spiric sections* en inglés. Este nombre deriva de la palabra griega *spira* que utilizaban los antiguos griegos para referirse a la figura geométrica del toro [1].

La ecuación cartesiana de estas curvas viene dada por

$$\left(R^2 - r^2 + c^2 + x^2 + y^2\right)^2 = 4r^2\left(x^2 + y^2\right)$$

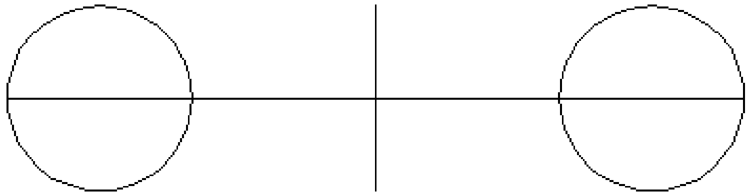
donde R es la distancia entre el centro del tubo y el centro del toro, r es el radio del tubo y c es la distancia entre el centro del toro y el plano cortante.



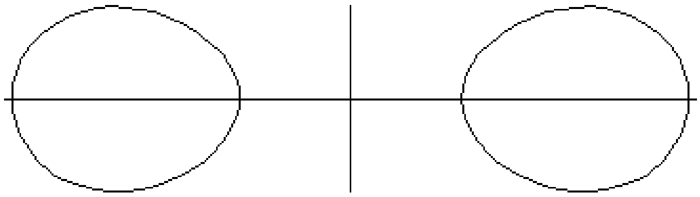
Dado que tanto x como y sólo aparecen en la ecuación cartesiana elevados a potencias pares, estas curvas son simétricas respecto de ambos ejes coordenados.

Según las relaciones entre R, r y c se obtienen diferentes curvas:

- Cuando $c = 0$ la curva consiste en dos circunferencias de radio r centradas en $(-R, 0)$ y $(R, 0)$. La ecuación cartesiana se reduce a $(R^2 - r^2 + x^2 + y^2)^2 = 4r^2(x^2 + y^2)$

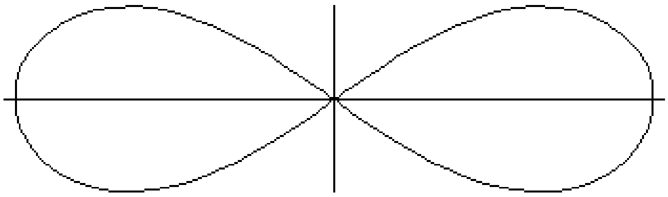


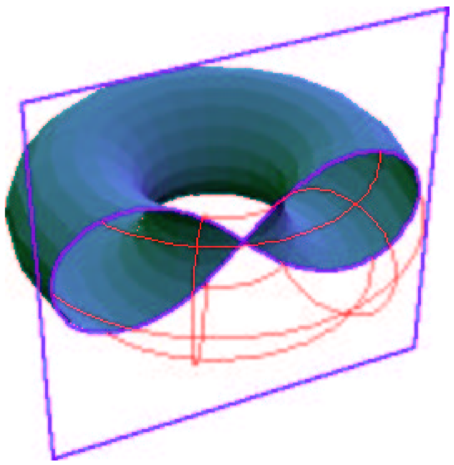
- Si $0 < c < R - r$ entonces la curva tiene dos ramas cerradas.

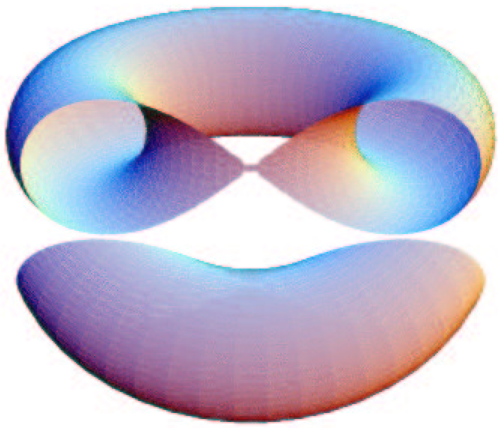


- Si $c = R - r$ la curva resultante es una Lemniscata.

  En el caso particular en el que $R = 2r$ se obtiene la Lemniscata de Bernouilli, utilizada como signo del infinito matemático (∞) desde que lo establece John Wallis en 1655 [4].



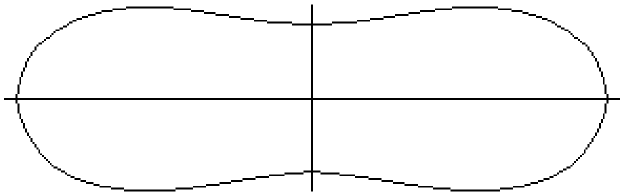




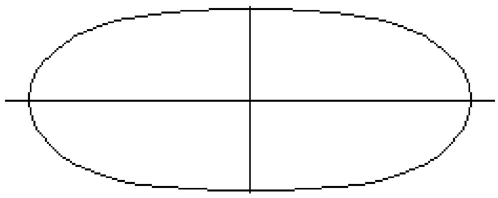
La ecuación cartesiana que obtenemos así para la Lemniscata de Bernouilli es [2, 3]

$$\left(x^2 + y^2\right)^2 = 2R^2\left(x^2 - y^2\right)$$

- Si $R - r < c < R$ entonces la curva tiene sólo una rama cerrada, parecida a una elipse estrechada por su parte central.



- Si $R \leq c < R + r$ la curva pierde el esctrechamiento en su parte central.



- Si $c = R + r$ la curva consiste en un único punto, denominado el origen
- Si $c > R + r$ la curva no tiene ningún punto

Referencias

[1] Brieskorn, E.; Knörrer, H.: Plane algebraic curves. Birkhäuser, 1986.

[2] Lemniscate of Bernoulli
`www.xahlee.org/SpecialPlaneCurves_dir/LemniscateOfBernoulli_dir/lemniscateOfBernoulli.html`

[3] Eric W. Weisstein. "Lemniscate."From MathWorld–A Wolfram Web Resource.
`http://mathworld.wolfram.com/Lemniscate.html`

[4] Gérard P. Michon, Ph.D. "Scientific Symbols and Icons".
`http://home.att.net/~numericana/answer/symbol.htm#infinity`

[5] Spira de Perseus en la Wikipedia.
`http://es.wikipedia.org/wiki/Spira_de_Perseus`

[6] Spiric sections from The MacTutor History of Mathematics archive.
`http://www-groups.dcs.st-and.ac.uk/~history/Curves/Spiric.html`

[7] Spiric Section (work in progress) by Xah Lee.
`www.xahlee.org/SpecialPlaneCurves_dir/SpiricSections_dir/spiricSections.html`