Tema 3

Problemas de valores iniciales

3.1. Teoremas de existencia y unicidad

Estudiaremos las soluciones aproximadas y su error para funciones escalares, sin que ésto no pueda extenderse para funciones vectoriales. Veremos cuándo una sucesión de funciones aproximadas puede converger a la solución exacta.

Definición 1 *Sea $f(t,x)$ una función continua en Ω y sea $I=[\alpha,\beta]\subset\mathbb{R}$. Se dice que una función $x(t)$ es una* solución aproximada *de la ecuación diferencial $x'=f(t,x)$ si se verifica:*

(i) $x(t)$ *es adminisble, i.e.* $(t,x(t))\in\Omega\ \forall\, t\in I$ *y* $f(t,x(t))$ *está definida* $\forall\, t\in I$

(ii) $x(t)$ *es continua en* I

(iii) $x(t)$ *es derivable con continuidad a trozos en* I*, i.e. es derivable con continuidad salvo en un número finito de puntos* $\xi_1,\xi_2,\ldots,\xi_n$

(iv) $|x'(t)-f(t,x(t))|<\varepsilon \quad \forall\, t\in I-\{\xi_1,\xi_2,\ldots,\xi_n\}$

El Teorema de Existencia de Soluciones Aproximadas garantiza que podremos buscar soluciones aproximadas con el error tan pequeño como queramos.

Teorema 1 (Teorema de Existencia de Soluciones Aproximadas)
Sea $(t_0,x_0)\in\Omega$, sea $\mathcal{R}=\{(t,x)\,:\,|t-t_0|\le a, |x-x_0|\le b\}\subset\Omega$. Supongamos que

a) $f(t,x)\in C(\Omega)$

b) $|f(t,x)|\le M \quad \forall\,(t,x)\in\Omega$

Entonces, si $h=\min\left\{a,\frac{b}{M}\right\}$ se puede construir una solución aproximada $x(t)=\varphi(t)$, en el intervalo $|t-t_0|\le h$ y tal que $x(t_0)=x_0$, que verifica que $|x'(t)-f(t,x)|<\varepsilon$ donde ε está fijado previamente.

Definición 2 *Se llama* transformación contractiva *a la función definida $T : M \to M$, con M un espacio métrico $M = (A, d)$, tal que*

$$d\left(T(x), T(y)\right) \leq k \cdot k(x, y) \quad \forall\, x, y \in M$$

donde k es una constante tal que $0 \leq k < 1$.

Lema 1 *Toda transformación contractiva T en un espacio métrico completo posee un punto invariante y sólo uno, es decir, la ecuación $T(u) = u$ tiene una única solución.*

3.1.1. Teorema de Picard

Teorema 2 (Teorema de Picard) *Sea $y' = F(x, y)$ con F definida en un dominio abierto $\mathcal{D}$ y contínuca, Lipschitziana respecto y, y acotada:*

(1) $F(x, y) \in C(\mathcal{D}) \quad \forall\, (x, y) \in \mathcal{D}$

(2) $F(x, y) \in \mathcal{L}ip(y, \mathcal{D})$

(3) $|F(x, y)| \leq M \quad \forall\, (x, y) \in \mathcal{D}$

Entonces existe una única solución que pasa por (x_0, y_0).

La condición (3) es prescindible, se añade por comodidad, pues siempre se puede tomar un compacto $\mathcal{Q} \in \mathcal{D}$.

Siempre se puede prolongar la solución hasta la frontera del dominio, pero en la frontera habrá que ver qué pasa.

Definición 3 *Una función $y = \varphi(x)$ se dice que es una* solución particular *de la ecuación $x' = F(x, y)$ y que pasa por el punto (x_0, y_0) si verifica:*

(1) $\exists\, \eta_1, \eta_2 > 0$ *tales que* $\varphi(x)$ *es diferenciable en* $E = \{x \,:\, -\eta_1 \leq x - x_0 \leq \eta_2\}$

(2) $\frac{d\varphi(x)}{dx} = F(x, \varphi(x)) \quad \forall\, x \in E$

(3) $\varphi(x_0) = y_0$

Cuando hablamos de unicidad de soluciones no exigimos que dadas dos soluciones éstas sean iguales. Sean $\varphi(x), \psi(x)$ dos soluciones definidas en E_1, E_2 respectivamente. La unicidad se entiende sólo restringida a un dominio contenido en $E = E_1 \cap E_2$, i.e. $\varphi(x)_{|E_1} = \psi(x)_{|E_2}$

3.1.2. Aplicación del Teorema de Picard

Damos aquí unas *orientaciones generales* sobre el orden en el cual es conveniente proceder al aplicar el Teremoa de Picard a una ecuación diferencial. Dividiremos la aplicación del teorema de Picard en las siguientes fases:

1. Determinación del dominio de regularidad de la ecuación diferncial.
2. Estudio de una solución particular.
   a) Elección de Q
   b) Cálculo de H, K, η
   c) Iterantes
   d) Regularidad

Determinación del dominio de regularidad de la ecuación diferncial.

Se trata de encontrar el *dominio más general* posible D, tal que para cualquier punto elegido en D, el Teorema de Picard garantice la existencia y unicidad de solución del problema de Cauchy correspondiente. Para ello se analizará el conjunto de definición de F y se adoptará inicialmente el dominio D_0 más amplio contenido en él. Si el conjunto de definición es unión de varios dominios, se efectuará el estudio por separado en cada uno de ellos.

Del dominio D_0 se destacará, a su vez, el subdominio más amplio D_1 (que puede coincidir con D_0) en el cual F sea continua. Finalmente en D_1 se estudia la verificación por parte de F de la condición de Lipschitz, lo que en general motivará una nueva reducción en D_1 para obtener D. En los casos en que exista y sea continua $\frac{\partial F}{\partial y}$ en todo D_1, se tiene su acotación en cualquier compacto $Q \subset D_1$ y por tanto $F \in \mathcal{L}ip(y, D_1)$, en consecuencia el dominio buscado es $D = D_1$, que se dirá *dominio de regularidad* de la ecuación diferencial.

Veamos algunos detalles adicionales sobre la determinación del dominio de regularidad de la ecuación diferncial.

Dominio real Se refiere al dominio D tal que si $(x_0, y_0) \in D$ entonces $F(x_0, y_0) \in \mathbb{R}$. Por tanto hay que excluir aquellos puntos (x_0, y_0) tales que $F(x_0, y_0) \in \mathbb{C}$ o bien $F(x_0, y_0) \to \infty$.

Vamos a suponer que $y' = F(x, y) = F_1 + F_2 + F_3 + \cdots + F_n$, es decir, dada como una suma de funciones.

Para buscar los puntos que hacen a F infinito se iguala el denominador de cada término a cero. Se buscan las raíces y estas raíces que anulan al denominador pero no al numerador se excluyen de D. Si se anula el numerador también (para estas raíces), entonces se quita la indeterminación dividiendo por $(x - a)$ a ambos (numerador y denominador) de ser a la raíz que anula a ambos.

Para buscar los puntos que hacen a $F(x, y)$ ser un número complejo, se igualan los radicandos de índice par a cero, y se toman los que hagan al radicando mayor o igual que cero.

Si el conjunto de definición de $F(x,y)$ nos lo dan como un conjunto cerrado, debemos tomar un dominio contenido en el conjunto dado, lo mayor posible, para lo cual se excluyen los puntos de la frontera.

Si $F(x,y) = P(x)$ (polinomio en x) está definido $\forall\, x \in \mathbb{R}$ y nunca se hace infinito.

Si un radicando de índice par es el cociente de dos funciones, deben el numerador y el denominador tener el mismo signo a la vez en el conjunto de definición para ser positivo el radicando.

Si una ecuación no está en forma normal, se trata de ponerla en forma normal y debe resultar una función equivalente a la primera, haciendo un estudio de esta nueva ecuación.

Fijarse bien que una cosa es el dominio de D donde F está definida y otro el dominio D regular donde podemos aplicar el Teorema de Picard. Este último lo obtenemos del anterior, restringiéndole al quedarnos con los puntos (x,y) que hagan a F cumplir continuidad, acotación y lipchicianidad.

Continuidad de $F(x,y)$ La continuidad también nos restringe el dominio de definicióin D, pues para los puntos donde F es discontinua Picard no se aplica. Tampoco tiene sentido hablar de la derivación de F en las discontinuidades, pues sabemos que en ellas F no admite derivadas.

En los puntos de las discontinuidades de F no se estudia la lipchiciana, pues esos puntos están ya excluidos.

Nos será muy útil el siguiente teorema:

Teorema 3 (Teorema de Heine) *Si una función F es continua en un compacto contenido en un abierto, entonces F está acotada, puesto que alcanzará su extremo superior en el punto máximo y alcanzará el extremo inferior en el punto mínimo.*

Si una función $f(x,y)$ es continua lo son también $(f(x,y))^n$, $|f(x,y)|$ y $\sqrt[n]{f(x,y)}$ si existen.

Un polinomio $P_n(x,y)$ siempre es contínuo. Si es

$$f(x,y) = \frac{P_1(x,y)}{P_2(x,y)}$$

donde P_1, P_2 son polinomios, $f(x,y)$ será una función continua salvo para aquellos puntos (x_0,y_0) tales que $P_2(x_0,y_0) = 0$ y $P_1(x_0,y_0) \neq 0$.

Acotación de $F(x,y)$ F está acotada si existe una constante H tal que

$$\sup_{(x,y)\in \mathring{Q}} |F(x,y)| \leq H$$

H es la menor de todas las cotas superiores, pero para saber que está acotada basta con que exista una tal constante H.

No tiene sentido pedir a una función que esté acotada, si es continua en D, pues por el Teorema de Heine estará acotada en un compacto $Q \subset D$, por lo que la comprobación de la acotación de F se puede suprimir. De Q debemos tomar el interior para que sea abierto y poder aplicar Picard.

Para hallar el extremo inferior si existen denominadores en F se hacen lo mayor posible y para el extremo superior se hacen lo menor posible, dando valores de D.

La cota H de $F(x, y)$ es la suma de toas las cotas correspondientes a sus términos.

Un polinomio $P(x, y)$ está acotado siempre, en un compacto $Q \subset \mathbb{R}$.

Recordemos algunas acotaciones para, no sólo acotar $F(x, y)$ sino también para acotar $\frac{\partial F}{\partial y}$ para hallar la constante de Lipschitz.

$$\begin{aligned} |x+y| &\leq |x| + |y| \\ |x| - |y| &\leq |x-y| \\ |x \cdot y| &\leq |x| \cdot |y| \\ ||x+y|| &\leq |x| + |y| \\ |x^2 - y^2| &= |x+y| \cdot |x-y| \\ |\cos ax| &\leq 1 \\ |\operatorname{sen} ax| &\leq 1 \end{aligned}$$

Lipchicianidad de una función La comprobación directa de una función mediante la definición de Lipschitz es a veces complicado, pero esta dificultad queda resuelta haciendo uso de algunos teoremas que nos dan condiciones suficientes así:

Teorema 4 *$F(x, y) \in \mathcal{L}ip(y, D)$ si existe $\frac{\partial F(x,y)}{\partial y}$ en un dominio convexo D y existe una constante K (que será la constante de Lipschitz) tal que acote a $\frac{\partial F}{\partial y}$ en D, es decir:*

$$F(x, y) \in \mathcal{L}ip(y, D) \quad si \quad \sup_{(x,y)\in D} \left| \frac{\partial F(x, y)}{\partial y} \right| \leq K$$

Teorema 5 *Si es $Q \subset D$ un compacto y si existe $\frac{\partial F}{\partial y}$ continua y si $\mathring{Q}$ (interior de Q) es conexo, entonces estará acotada la $\frac{\partial F}{\partial y}$ según el Teorema de Heine y diremos que F es localmente Lipchiciana en D, aunque $\frac{\partial F}{\partial y}$ no esté acotada en D. F localmente lipchiciana lo denotaremos por*

$$F \in \mathcal{L}ip_C(y, D) \quad \Rightarrow \quad F \in \mathcal{L}ip(y, \mathring{Q})$$

Si no existe $\frac{\partial F(x,y)}{y}$ no se puede afirmas si es o no Lipschitz, para saberlo tendríamos que aplicar la definición de Lipschitz directamente para esos puntos donde no exista $\frac{\partial F}{\partial y}$ solamente, pues para los demás si $\frac{\partial F}{\partial y}$ está acotada, en ellos será Lipschitz.

Teorema 6 *Si una función es continua respecto de la variables x y si $F(x, y) \in \mathcal{L}ip(y, D)$, entonces $F(x, y) \in C(D)$, pero el recíproco no es cierto.*

Teorema 7 *Si no existe una única $\frac{\partial F}{\partial y}$ pero existe a la izquierda y derecha de ese punto (x, y) (donde deja $F(x, y)$ de ser derivable) y estas derivadas está acotadas, entonces $F(x, y)$ es lipchiciana también para esos puntos (x, y), tomándose como constante la mayor de las dos cotas.*

Estudio de una solución particular.

Elección de Q Fijado un punto $(x_0, y_0) \in D$, para estudiar el intervalo en que *inicialmente* está garantizada la existencia de la única solución que pasa por él, es necesario *calcular* la cota H de F y una constante de Lipschitz K.

Debe entonces tenerse presente que si F no es acotada en D, caso muy frecuente, es necesario elegir un compacto Q tal que su interior $\mathring{Q}$ sea un dominio, de forma que $(x_0, y_0) \in Q$ y $Q \subset D$; se trabajará entonces en Q. Si existe $\frac{\partial F}{\partial y}$ y es continua en Q, acotándole se tendrá K.

¿Cómo debe elegirse Q? Es obvio que convendrá tomar una figura geométrica sencilla tal como un círculo de centro (x_0, y_0), un cuadrado o rectángulo de dentro en ese punto y lados paralelos a los ejes, etc. A veces la forma de F puede sugerir la figura más adecuada.

Cálculo de H, K, η Se calculan una cota H de F y una constante de Lipschitz K relativas a Q. En general no será posible obtener precisamente

$$\sup_{(x,y)\in\mathring{Q}} |F(x, y)|$$

que es la menor de todas las cotas superiores, ni tampoco la menor constante de Lipschitz válida en $\mathring{Q}$. En todo caso conviene aproximarse a esa "situación ideal", procurando que las H y K calculadas sean lo menor posible.

Téngase presente que la solución correspondiente a (x_0, y_0) está inicialmente garantizada en un intervalo de amplitud η tal que

$$\eta = \text{mín}\left(\frac{d_2\left((x_0, y_0), F(\mathring{Q})\right)}{\sqrt{1 + H^2}}, \frac{1}{K}\right)$$

y que lógicamente interesa que η sea lo mayor posible; ahora bien cuanto mayores sean H y K menor resulta η.

Ciertamente la elección de Q influye en este resultado, puede entonces plantearse el problema de la elección óptima de Q. En toda su generalidad tal problema es inabordable, pero se puede elegir Q dentro de una clase determinada de figuras (por ejemplo circunferencias de dentro el punto) de forma que η sea máxima.

Iterantes Se hallan las funciones *iterantes de Picard* $\psi_0, \psi_1, \psi_2, \ldots$ que aproximan la solución del problema de Cauchy considerado. Según se sabe, es:

$$
\begin{aligned}
x \to \psi_0(x) &= y_0 \\
x \to \psi_1(x) &= y_0 + \int_{x_0}^{x} F(t, y_0)\,\mathrm{dt} \\
x \to \psi_2(x) &= y_0 + \int_{x_0}^{x} F(t, \psi_1(t))\,\mathrm{dt} \\
&\vdots \\
x \to \psi_n(x) &= y_0 + \int_{x_0}^{x} F(t, \psi_{n-1}(t))\,\mathrm{dt}
\end{aligned}
$$

Cuanto más simple sea la forma de F, más sencillo será el cálculo de los primeros términos de la sucesión $\{\psi_n\}$.

Para darse una idea del grado de aproximación conseguiro cuando se sustituye la solución ψ desconocida por la iterante ψ_n, basta tener en cuenta que

$$d\,(\psi, \psi_n) \leq K\eta d\,(\psi, \psi_{n-1})$$

ya que, como se sabe, en la transformación contractiva, la imagen de ψ_{n-1} es ψ_n y ψ es su "punto" invariante.

Análogamente

$$
\begin{aligned}
d\,(\psi, \psi_{n-1}) &\leq K\eta d\,(\psi, \psi_{n-2}) \\
&\vdots \\
d\,(\psi, \psi_1) &\leq K\eta d\,(\psi, \psi_0)
\end{aligned}
$$

y multiplicando estas desigualdades:

$$d\,(\psi, \psi_n) \leq K^n \eta^n d\,(\psi, \psi_0)$$

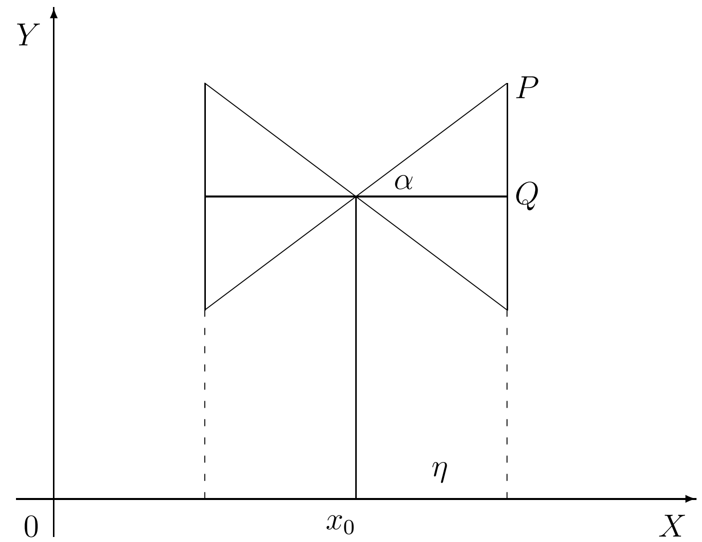
Ahora bien,

$$d\,(\psi, \psi_0) < \overline{PQ} = \eta \cdot \tan\alpha \leq \eta \cdot H$$

y en definitiva se obtiene:

$$d\,(\psi, \psi_n) \leq H K^n \eta^{n+1}$$

Regularidad La mera existencia de la solución ψ correspondiente a un cierto dato inicial implica automáticamente que $\psi \in C^1$ es su intervalo de definición. Si de R puede afirmarse no ya su continuidad y carácter lipchiciano en D, sino además la verificación de $F \in C^n(D)$ para $n > 1$ entero —es decir, la existencia y continuidad en D de todas las derivadas de F



hasta las de orden n incluído— entonces la solución ψ que pasa por $(x_0, y_0) \in D$ "hereda" en cierto modo el carácter de F, ya que se tiene $\psi \in C^{n-1}$ en el intervalo en que está definida.

Análogamente $F \in C^{\infty}(D)$ implica $\psi \in C^{\infty}$ y aún más, si F es analítica la analiticidad se transmite a ψ.

3.1.3. Integrantes de Picard (Aproximaciones sucesivas)

Teorema 8 *Una condicióin necesaria y suficiente para que una función $y = \varphi(x) \in C^1(E)$ sea solución de la EDO $y' = F(x, y)$ es que se exprese como*

$$\varphi(x) = y_0 + \int_{x_0}^{x} F(t, \varphi(t))\, dt$$

Teniendo sólo las conciciones (1) y (3) del Teorema de Picard, i.e. cuando se tiene que $F \notin \mathcal{L}ip(y, \mathcal{D})$, se puede construir una sucesión de funciones admisibles en el entorno, $\varphi_1(x), \varphi_2(x), \ldots, \varphi_n(x), \ldots$ a partir de $\varphi_0(x) \in C^1(E)$.

En particular, suele tomarse $\varphi_0(x) = y_0$ y definirse

$$\begin{aligned} \varphi_1(x) &= y_0 + \int_{x_0}^{x} F(t, \varphi_0(t))\, \mathrm{dt} \\ \varphi_2(x) &= y_0 + \int_{x_0}^{x} F(t, \varphi_1(t))\, \mathrm{dt} \\ &\vdots \\ \varphi_{n+1}(x) &= y_0 + \int_{x_0}^{x} F(t, \varphi_n(t))\, \mathrm{dt} \end{aligned} \tag{3.1}$$

Estas "soluciones aproximadas" son las denominadas *Integrantes de Picard* o aproximaciones sucesivas.

La sucesión de funciones, será absoluta y uniformemente convergente a $\varphi(x)$ siempre que $F \in \mathcal{L}ip(y, \mathcal{D})$, es decir:

Teorema 9 *Sea la EDO $y' = F(x, y)$, si:*

(1) $F \in C(\mathcal{D})$

(2) $F \in \mathcal{L}ip(y, \mathcal{D})$

(3) $|F(x, y)| \leq M \quad \forall\, (x, y) \in \mathcal{D}$

Entonces la sucesión de funciones $\{\varphi_n(x)\}$, para $|x - x_0| \leq \eta$ es absoluta y uniformemente convergente a una

$$\varphi(x) = y_0 + \int_{x_0}^{x} F(t, \varphi(t))\, dt$$

Además,

$$|\varphi(x) - \varphi_n(x)| \leq \frac{M}{k} \frac{(k\eta)^n}{n!} \left(e^{k\eta} - 1\right)$$

Obsérvese que el error depende del tamaño del entorno en el que esté x, i.e. de η.

Lema 2 (Lema de Gronwall)
Sean dos funciones continuas $f : [a, b] \to \mathcal{R}$, $g : [a, b] \to \mathcal{R}^+$ y sea $y : [a, b] \to \mathcal{R}$ una función continua tal que

$$y(t) \leq \int_a^t g(s) ds$$

entonces, se verifia que

$$y(t) \leq f(t) + \int_a^t f(s) g(s) e^{\int_s^t g(u)\, du} ds$$

En el caso particular de que $f(t) = k$ constante:

$$y(t) \leq k + \int_a^t e^{\int_a^t g(s)} ds$$

El Lema de Gronwall no tiene, en principio, relación con los teoremas de existencia y unicidad de soluciones. Lo utilizaremos más adelante.

Teorema 10 (Desigualdad fundamental)
Sea $(x_0, y_0) \in \mathcal{Q} = \{(x, y) : |x - x_0| \leq a, |y - y_0| \leq b\} \subset \mathcal{D}$ un rectángulo contenido en el dominio. Dado el problema de Cauchy

$$PC \equiv \left\{ \begin{array}{l} y' = f(x,y) \\ f(x_0) = y_0 \end{array} \right.$$

con $f \in C(\mathcal{D})$ y $f \in \mathcal{L}ip(y, \mathcal{D})$. Entonces, si $y_1(x)$, $y_2(x)$ son soluciones aproximadas del problema de Cauchy con errores ε_1 y ε_2 respectivamente en $|x - x_0| \leq h$, se verifica que

$$|y_1(x) - y_2(x)| \leq e^{k|x-x_0|} \, |y_1(x_0) - y_2(x_0)| + \frac{\varepsilon_1 + \varepsilon_2}{k} \left(e^{k|x-x_0|} - 1 \right)$$

Corolario 1 *Si y_1, y_2 son soluciones exactas de la misma EDO pero que pasan por distintos puntos (condiciones inicales) su diferentica $|y_1 - y_2|$ está acotada por la diferencia $|y_1(x_0) - y_2(x_0)|e^{k|x-x_0|}$.*

Teorema 11 *Sean F, f funciones tales que*

(a) $F(x,y) \in C(\mathcal{D}, \; f(x,y) \in C(\mathcal{D}$

(b) $f(x,y) \in \mathcal{L}ip(y, \mathcal{D}) \quad \forall \, (x,y) \in \mathcal{D}$

(c) $|F(x,y) - f(x,y)| \leq \varepsilon \quad \forall \, (x,y) \in \mathcal{D}$

Si $y(x)$ es solución de $y' = f(x,y)$; $y(x_0) = y_0$ e $y^*(x)$ es solución de $y' = F(x,y)$; $y(x_0) = y_0$ entonces $|y(x) - y^*(x)| \leq L\varepsilon \quad \forall \, |x - x_0| \leq h$ donde L es una constante independiente de ε.

Esto es, si tenemos una EDO (f) que no sabemos resolver, pero tenemos una EDO (g) que sí sabemos resolver, y además $|f - g| \leq \varepsilon$ entonces podemos tomar la solución exacta de (g) como solución aproximada de (f).